ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι

Κεφάλαιο 6

Απόκριση κυκλωμάτων RL και RC

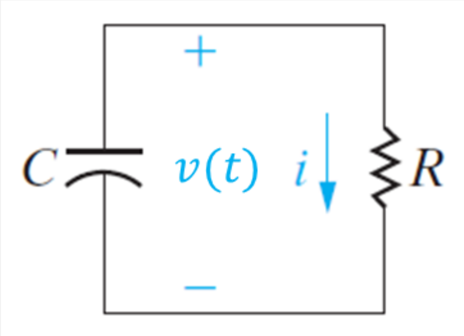
Μέρος **Β′**

Πυκνωτής

- Αποφόρτιση πυκνωτή μέσω αντίστασης - Φυσική απόκριση κυκλώματος RC
- Απόκριση πυκνωτή σε βηματική διέγερση τάσης

Φυσική απόκριση κυκλώματος *RC*

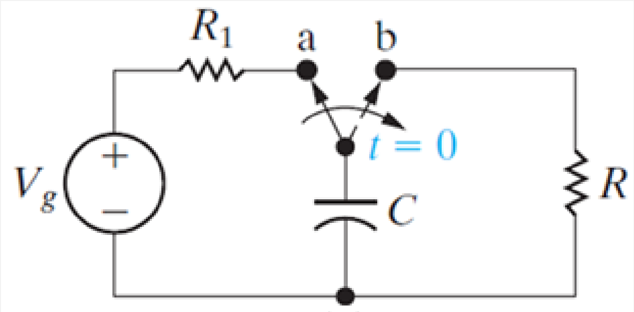
(Natural response of *RC* circuit)



- Πως αποφορτίζεται ένας πυκνωτής χωρητικότητας C όταν συνδεθεί με εξωτερική αντίσταση R
- Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος RC

Αποφόρτιση πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω αντίστασης R

Έστω το διακοπτικό κύκλωμα της εικ. (α): Ο διακόπτης τη χρονική στιγμή $t = 0$ μετατίθεται στη θέση b αφού έχει μείνει στη θέση a για μεγάλο χρονικό διάστημα.

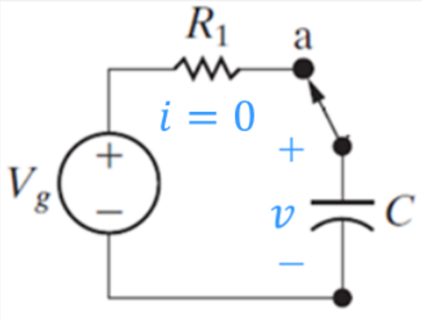


(α)

Για $t = 0^-$, ο πυκνωτής ισοδυναμεί με ανοικτό κύκλωμα ($i = 0$), *εικ. (β)*

- Η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή ισούται με την τάση V_g της πηγής

$$v(0) = V_g$$

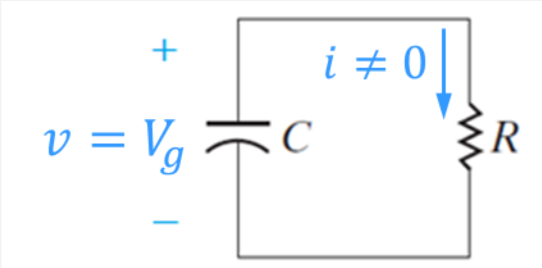


(β) Κύκλωμα $t = 0^-$

Κατά τη μετάθεση του διακόπτη από τη θέση a στη θέση b ($t = 0$), δεν μπορεί να υπάρξει καμία στιγμιαία αλλαγή στην τάση στους ακροδέκτες ενός πυκνωτή

Για $t = 0^+$, το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ. (γ)

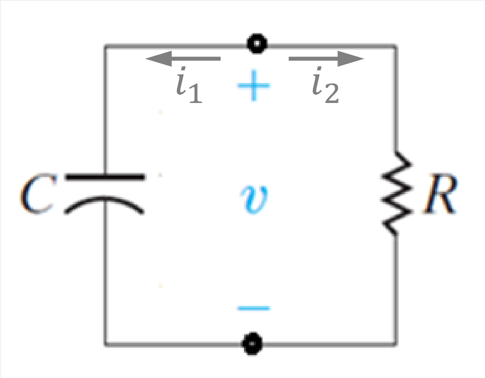
- Η τάση του πυκνωτή παραμένει V_g
- Ο πυκνωτής αποφορτίζεται μέσω της αντίστασης (ρεύμα $i \neq 0$)



(γ) Κύκλωμα $t = 0^+$

Αποφόρτιση πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω αντίστασης R – Η εξίσωση

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση για την τάση $v(t)$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τάσεων κόμβων



Κύκλωμα για $t \geq 0$

Υπόδειξη: δείτε την κάτω σύνδεση μεταξύ C και R ως κόμβο αναφοράς και αθροίστε τα ρεύματα (έστω i_1, i_2) από την ανώτερη σύνδεση ($i_1 + i_2 = 0$)

Παίρνουμε

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

Επίλυση εξίσωσης αποφόρτισης κυκλώματος *RC*

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0$$

Χωρίζοντας τις μεταβλητές v και t

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dt}{RC}$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int_{\boldsymbol{v(0)}}^{\boldsymbol{v(t)}}\frac{dv}{v}=-\frac{1}{RC}\int_{0}^{t}dt$$

παίρνουμε

$$\boldsymbol{v(t)=v(0)e^{-t/RC}},\qquad t\geq 0$$

όπου, $v(0)$ η αρχική τάση στον πυκνωτή, $v(0)=V_g=V_0$

Η εξίσωση αποφόρτισης γίνεται

$$\boldsymbol{v(t)=V_0e^{-t/RC}},\qquad t\geq 0$$

Φυσική απόκριση *RC* κυκλώματος

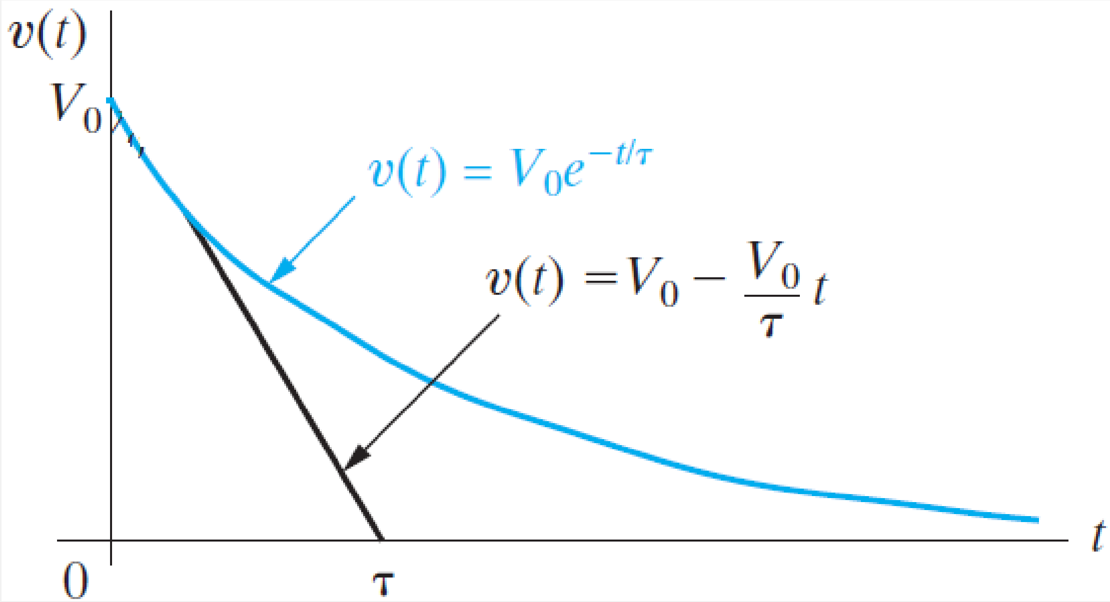
Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος RC - Γραφική αναπαράσταση αποφόρτισης

Σταθερά χρόνου (time constant) κυκλώματος RC:

$$\tau = RC$$

Χρησιμοποιώντας τη σταθερά χρόνου, η εξίσωση της αποφόρτισης γράφεται

$$\boldsymbol{v(t) = V_0 e^{-t/\tau}}, \qquad t \geq 0$$



Φυσική απόκριση κυκλώματος RC(αποφόρτιση του πυκνωτή)

Για τον υπολογισμό της φυσικής απόκρισης κυκλώματος *RC*

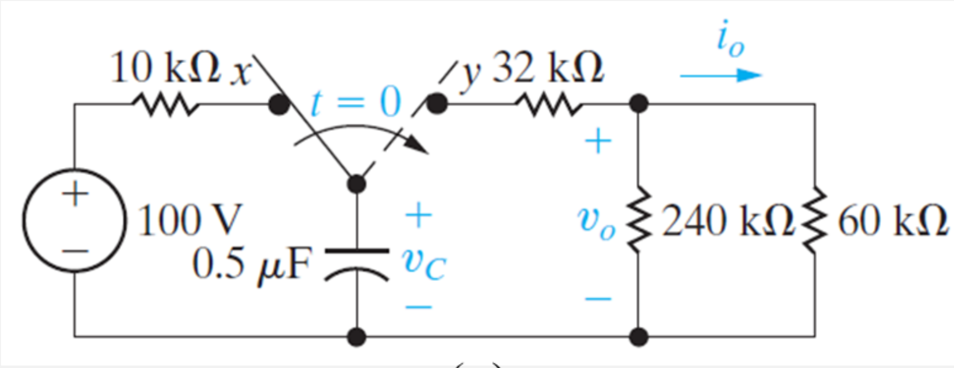
Βήμα 1: Βρίσκουμε την αρχική τάση V_0 στα άκρα του πυκνωτή.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τη σταθερά χρόνου $\tau = RC$ του κυκλώματος.

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$

Παράδειγμα 6.3

Ο διακόπτης στο κύκλωμα της *εικ. (α)* έχει μείνει στη θέση x για μεγάλο χρονικό διάστημα. Για $t = 0$ μετατίθεται στιγμιαία στη θέση y.

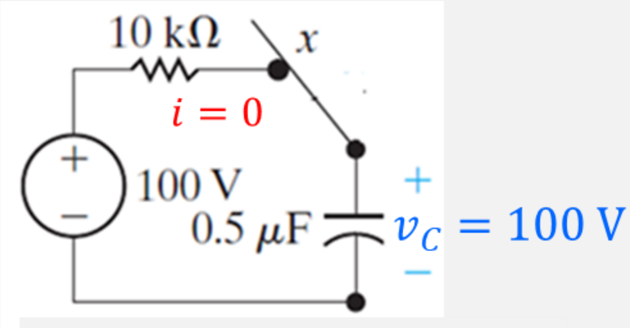


(α)

α) Βρείτε τη $v_C(t)$ για $t \geq 0$

Λύση

Ακριβώς πριν τη μεταγωγή ($t = 0^-$) και αφού έχει μείνει στη θέση x για μεγάλο χρονικό διάστημα, ο πυκνωτής ισοδυναμεί με ανοικτό κύκλωμα, $i = 0$, *εικ. (β)*.



(β) Κύκλωμα για $t = 0^-$

$$v_C(0) = \ 100 \text{ V}$$

με θετικό άκρο προς τα πάνω

(*συνεχίζεται …*)

Λύση *(… συνέχεια)*

Αμέσως μετά τη μεταγωγή του διακόπτη στο y ($t = 0^+$), το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (γ)*

$$v_C(0) = V_0 = 100 \text{ V}$$

Η ισοδύναμη αντίσταση που ‘βλέπει’ ο πυκνωτής για $t \geq 0$ είναι

$$R_T = 32\text{k} + (240\text{k} \parallel 60\text{k}) = 80 \text{ k}\Omega$$

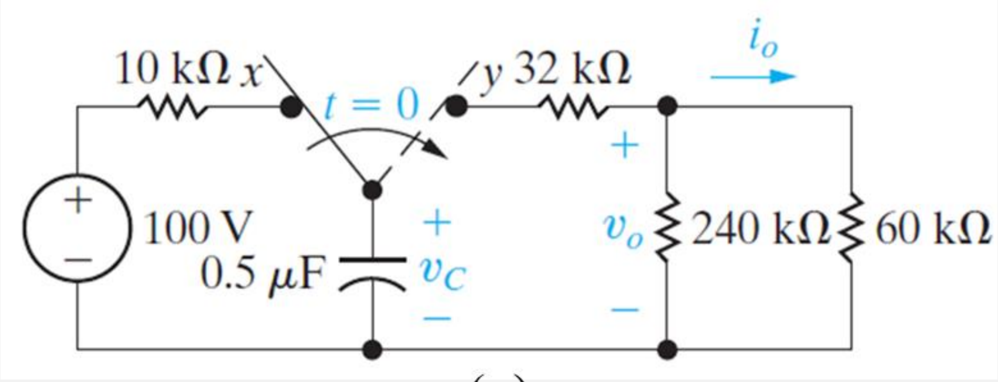
και το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (δ)*

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι

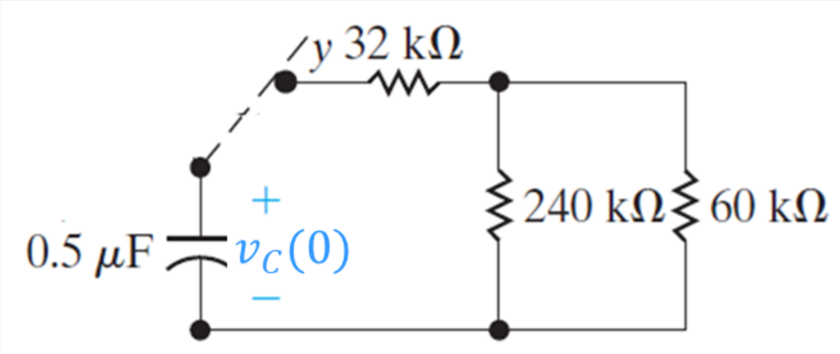
$$RC = (80 \times 10^3)(0.5 \times 10^{-6}) = 40 \text{ ms}$$

Επομένως,

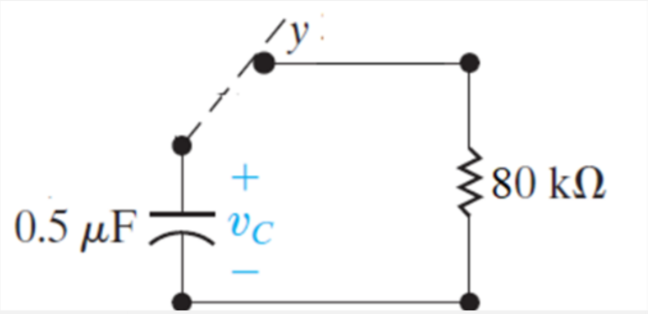
$$\boldsymbol{v_C(t) = 100e^{-25t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0}$$



(α)



(γ) Κύκλωμα για $t = 0^+$

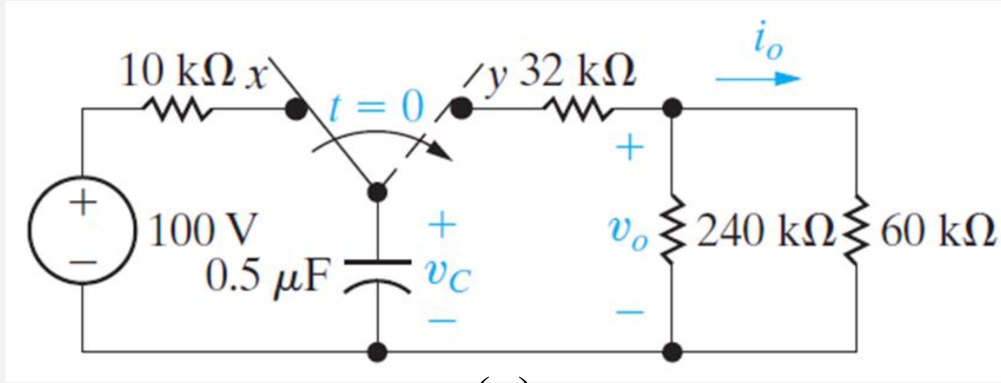


(δ) Κύκλωμα για $t \geq 0$

(συνεχίζεται …)

Παράδειγμα 6.3 *(… συνέχεια)*

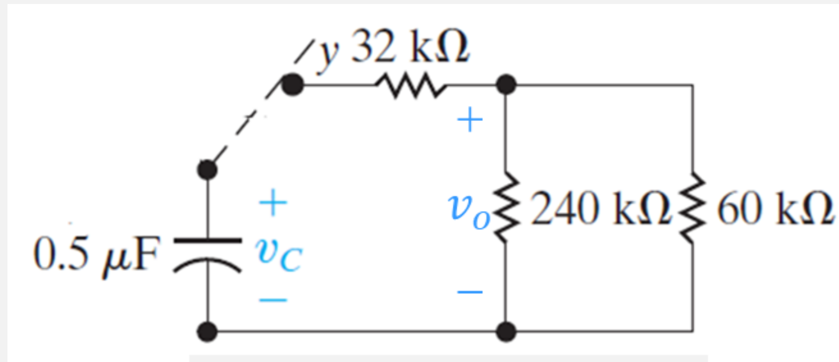
(β) Βρείτε την τάση $v_0(t)$ για $t \geq 0^+$



(α)

Λύση *(… συνέχεια)*

Για $t \geq 0^+$ το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (ε)*



(ε) Κύκλωμα για $t \geq 0$

Εφαρμόζοντας απλά διαιρέτη τάσης, η τάση v_0 στο σύστημα των δύο παράλληλων αντιστάσεων

$$240\text{k} \parallel 60\text{k} = 48\text{k}$$

βρίσκεται

$$v_0(t) = \frac{48k}{48k + 32k} v_C(t)$$

Επομένως,

$$\boldsymbol{v_0(t) = 60e^{-25t}\,V, \qquad t \geq 0^+}$$

(συνεχίζεται …)

Παράδειγμα 6.3 *(… συνέχεια)*

(γ) Βρείτε το $i_0(t)$ για $t \geq 0^+$

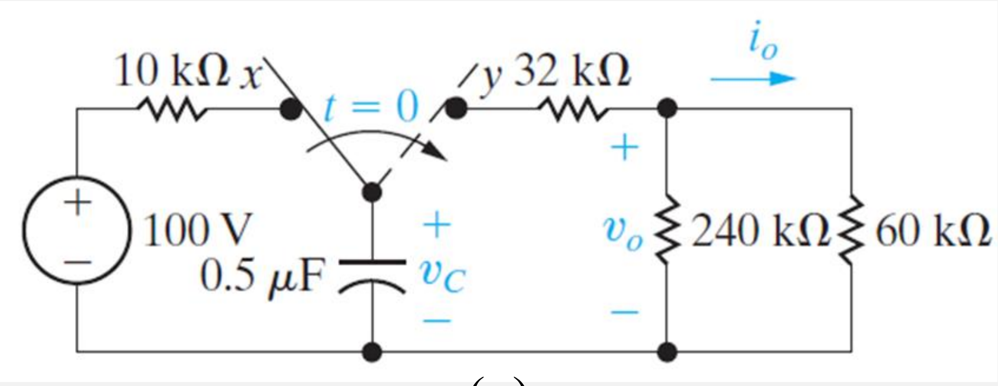
Λύση *(… συνέχεια)*

Από το νόμο του Ohm στην 60 kΩ

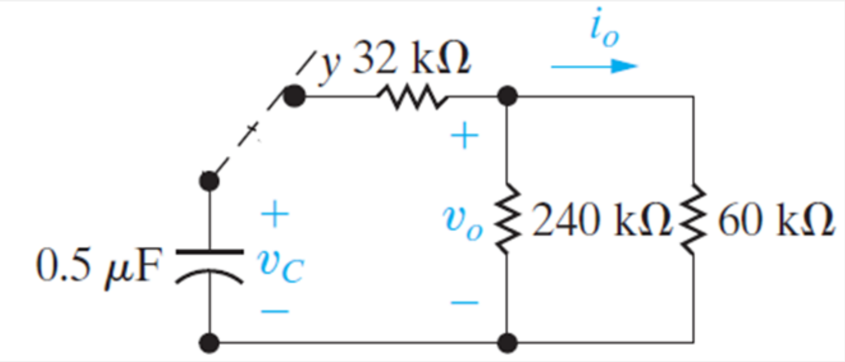
$$i_0(t) = \frac{v_0(t)}{60\ \text{k}\Omega}$$

$$i_0(t) = \frac{60e^{-25t}}{60 \times 10^3}$$

$$\boldsymbol{i_0(t) = e^{-25t}\ \mathbf{mA},} \qquad t \geq 0^+$$



(α)

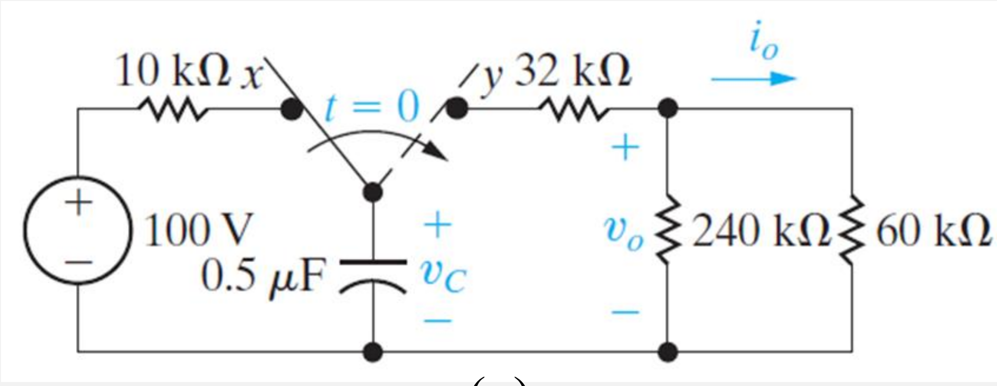


(γ) Κύκλωμα για $t \geq 0$

(συνεχίζεται …)

Παράδειγμα 6.3 *(… συνέχεια)*

(δ) Βρείτε την ολική ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση 60k



(α)

Λύση *(… συνέχεια)*

Η ισχύς στην 60k είναι

$$p_{60k}(t) = i_0^2(t)(60 \times 10^3)$$

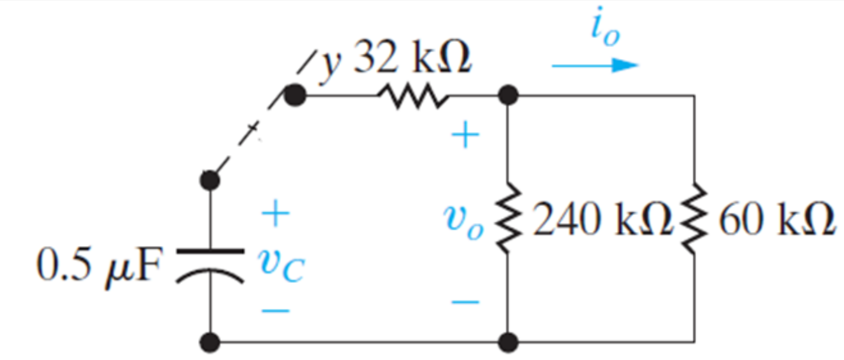
$$p_{60k}(t) = 60e^{-50t} \text{ mW}$$

Επομένως, η ολική ενέργεια που καταναλώνεται είναι

$$w_{60k} = \int_0^{\infty} p_{60k}(t)\, dt$$

$$w_{60k} = \int_0^{\infty} 60e^{-50t}\, dt$$

$$\boldsymbol{w_{60k} = 1.2 \text{ mJ}}$$



(γ) Κύκλωμα για $t \geq 0$

Προσομοιώστε τη λειτουργία του κυκλώματος του Παραδείγματος 6.3

με τη βοήθεια του κυκλώματος

Example 6_3

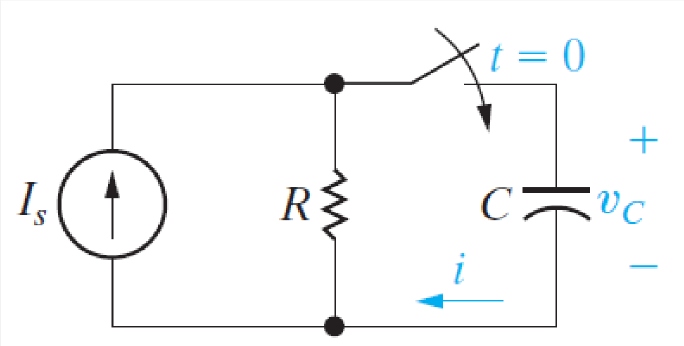
στην ομάδα

ECE-UOWM MK18

στο Multisim Live

Απόκριση κυκλώματος *RC* σε βηματική διέγερση

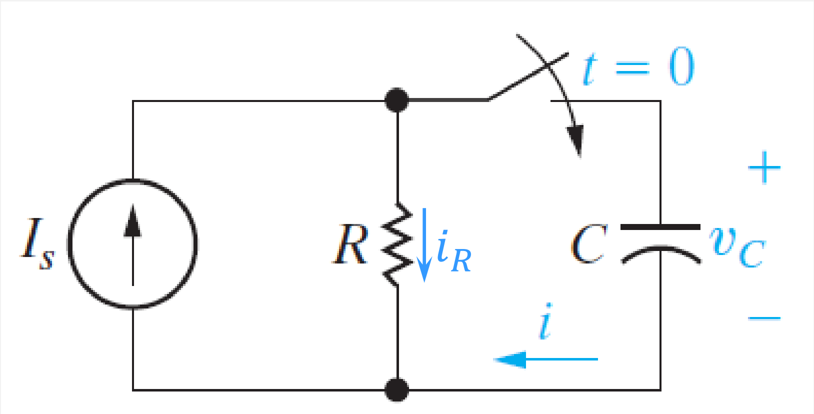
(Step response of *RC* circuit)



- Πως αναπτύσσεται το ρεύμα και η τάση σε ένα κύκλωμα *R*C όταν εφαρμοστεί ξαφνικά πηγή τάσης ή ρεύματος (βηματική διέγερση)

Απόκριση πυκνωτή σε βηματική διέγερση

Εικ. (α): Πηγή ρεύματος I_s, εσωτερικής αντίστασης R, εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ στα άκρα πυκνωτή C



(α)

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της τάσης των κόμβων (π.χ. στον επάνω κόμβο), παίρνουμε

$$i + i_R = I_s$$

που οδηγεί στην εξίσωση απόκρισης πυκνωτή σε βηματική διέγερση

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = I_s$$

Επίλυση εξίσωσης πυκνωτή σε βηματική διέγερση

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = I_s$$

Κατ'αναλογία προς την εξίσωση

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_s$$

της βηματικής απόκρισης πηνίου *(βλ. σελ. 14, 15)*, η οποία με χωρισμό μεταβλητών και ολοκλήρωση οδήγησε στη λύση

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t}$$

παίρνουμε

$$\boldsymbol{v_C = I_s R + (V_0 - I_s R)e^{-t/RC}}, t \geq 0$$

Βηματική απόκριση κυκλώματος *RC*

Η σημασία των παραμέτρων της εξίσωσης πυκνωτή σε βηματική διέγερση

$$\boldsymbol{v_C = I_s R + (V_0 - I_s R) e^{-t/RC}}, \qquad t \geq 0$$

V_0 είναι η αρχική τάση του πυκνωτή, δηλαδή, η τάση για $t = 0$

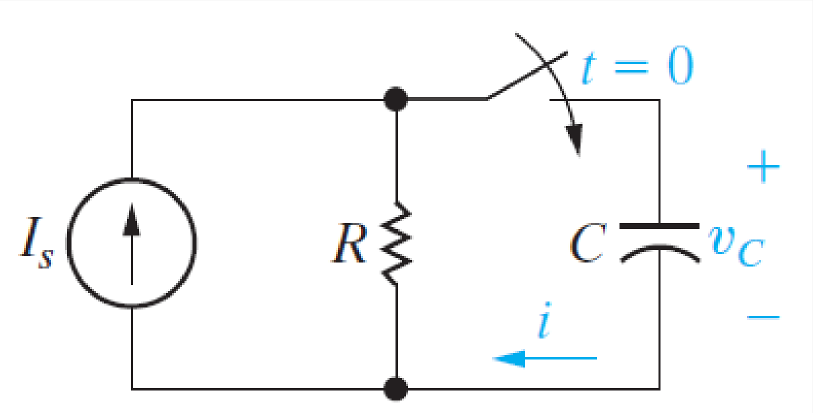
$$V_0 = v_C(0)$$

$I_s R$ είναι η τελική τάση του πυκνωτή, δηλαδή, η τάση για $t = \infty$

$$I_s R = v_C(\infty)$$

RC η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

$$RC = \tau$$

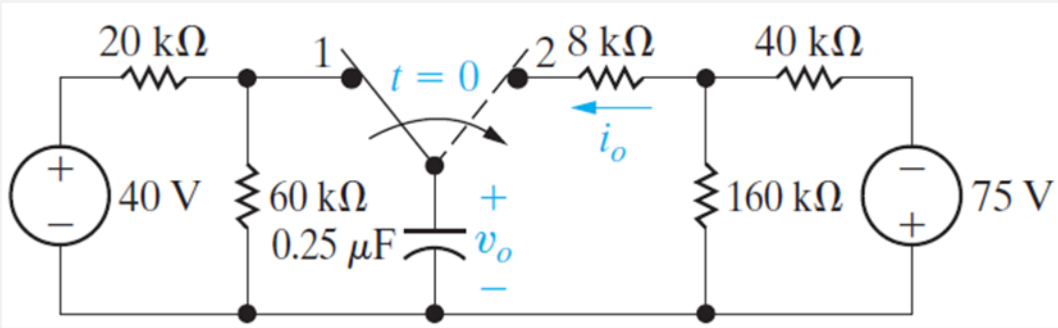


(α)

Παράδειγμα 6.4

Ο διακόπτης στο κύκλωμα της *εικ. (α)* έχει μείνει στη θέση 1 για μεγάλο χρονικό διάστημα. Για $t = 0$ μετατίθεται στη θέση 2.

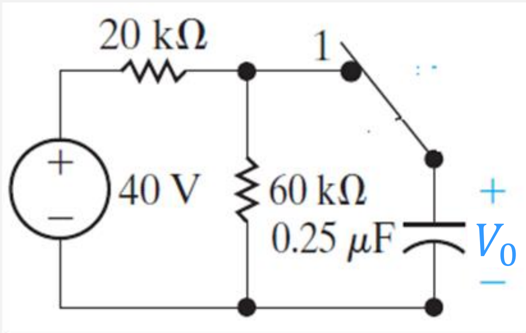
α) Βρείτε τη $v_0(t)$ για $t \geq 0$



(α)

Λύση

Ακριβώς πριν τη μεταγωγή του διακόπτη ($t = 0^-$, το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (β)*



(β) Το κύκλωμα για $t = 0^-$

Ο πυκνωτής έχει φορτιστεί στην τάση της αντίστασης 60 k. Επομένως,

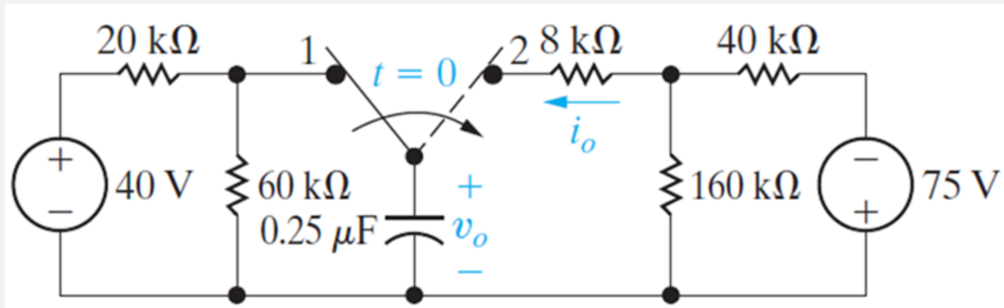
$$v_0(0) = V_0 = \frac{60\text{ k}}{60\text{ k} + 20\text{ k}} 40\text{ V} = 30\text{ V}$$

$$V_0 = 30\text{ V}$$

Αυτή είναι και η αρχική τάση της v_0 για $t \geq 0$

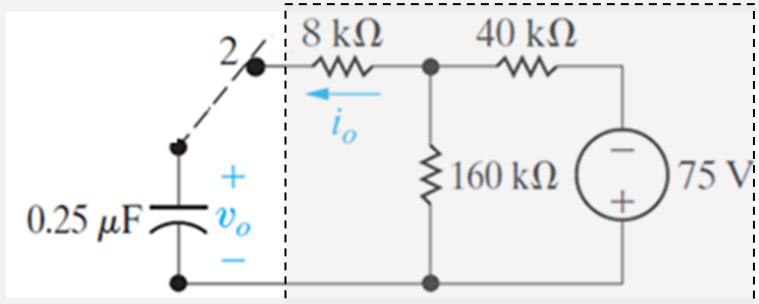
(συνεχίζεται …)

Λύση (… συνέχεια)



(α)

Μετά τη μεταγωγή του διακόπτη στη θέση 2 ($t \geq 0$), το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (γ)*



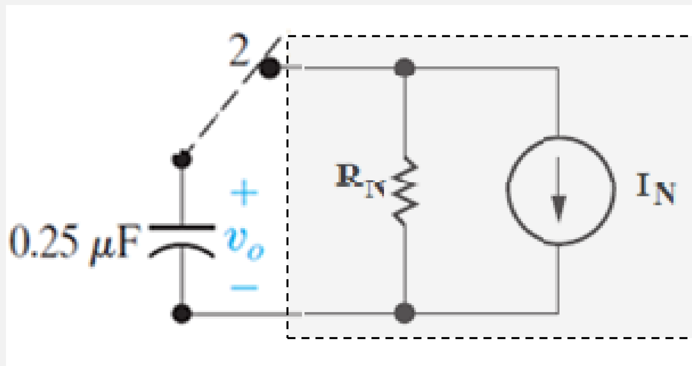
(γ) Το κύκλωμα για $t \geq 0$

Μπορούμε να βρούμε άμεσα τις παραμέτρους στην εξίσωση της βηματικής διέγερσης του πυκνωτή

$$v(t) = I_s R + (V_0 - I_s R)e^{-t/RC}$$

δηλαδή, τα I_s και R,

αντικαθιστώντας το κύκλωμα που ‘βλέπει’ ο πυκνωτής με μια ισοδύναμη πηγή ρεύματος I_s και αντίστασης R,



(δ)

δηλαδή, με το ισοδύναμο Norton, *εικ. (δ)*.

(συνεχίζεται …)

Λύση *(… συνέχεια)*

Το ισοδύναμο Norton

Ανοίγοντας τους ακροδέκτες (απομακρύνοντας τον πυκνωτή), *εικ. (δ)*, η τάση ανοικτού κυκλώματος V_{oc} μεταξύ a και b είναι

$$V_{oc} = \frac{160\text{ k}}{160\text{ k} + 40\text{ k}}(-75) = -60\text{ V}$$

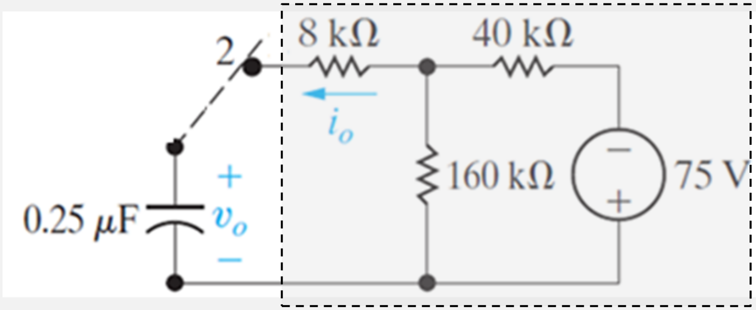
Για την αντίσταση Norton (ή Thevenin), βραχυκυκλώνουμε την πηγή τάσης, *εικ. (ε)*

Βρίσκουμε

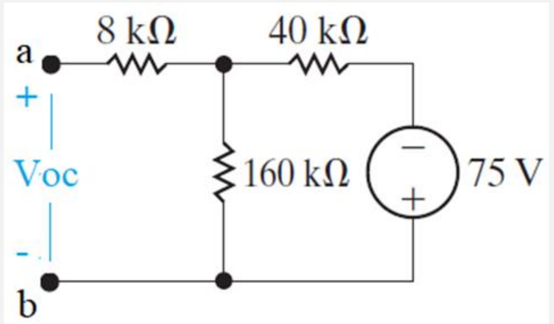
$$R_{th} = 8\text{k} + (40\text{k} \parallel 160\text{k}) = 40\text{ k}\Omega$$

Επομένως, η ισοδύναμη πηγή Norton είναι

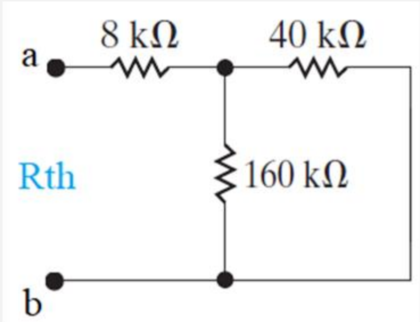
$$I_s = \frac{V_{oc}}{R_{th}} = \frac{-60}{40\text{ k}} = -1.5\text{ mA}$$



(γ) Το κύκλωμα για $t \geq 0$



(δ) Εύρεση ισοδυνάμου Norton

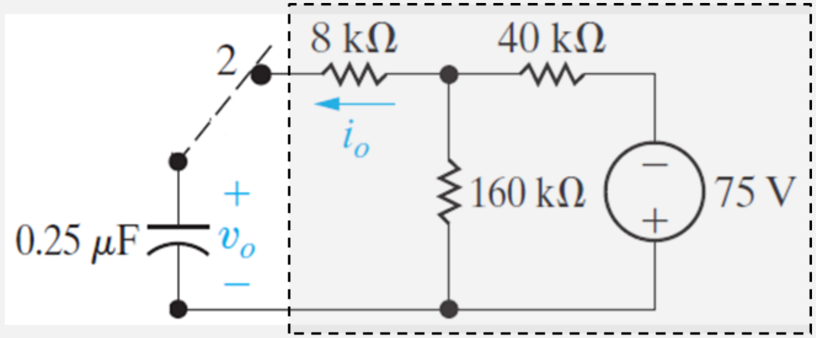


(ε) Εύρεση ισοδυνάμου Norton

(συνεχίζεται …)

Λύση (… συνέχεια)

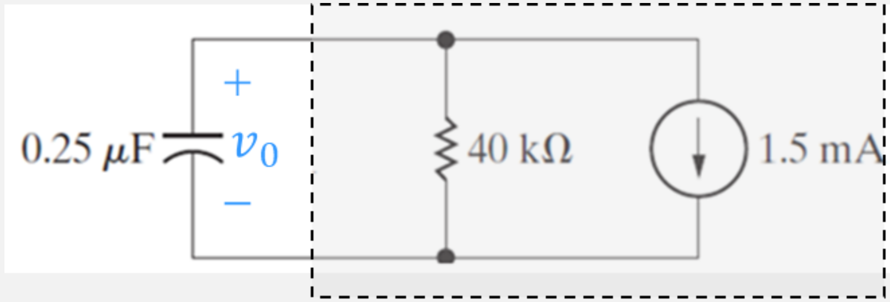
Το ισοδύναμο κύκλωμα του πυκνωτή για $t \geq 0$ είναι εικ. (στ)



(γ) Το κύκλωμα για $t \geq 0$

Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα (θεωρητικά άπειρο, πρακτικά 5τ), η τιμή της τάσης v_0 είναι

$$I_s R = -(1.5 \text{ mA})(40 \text{ k}\Omega) = -60 \ \Omega$$



(στ) Κύκλωμα για $t \geq 0$

Εισάγοντας στη σχέση για βηματική διέγερση

$$v(t) = I_s R + (V_0 - I_s R)e^{-t/RC}$$

παίρνουμε

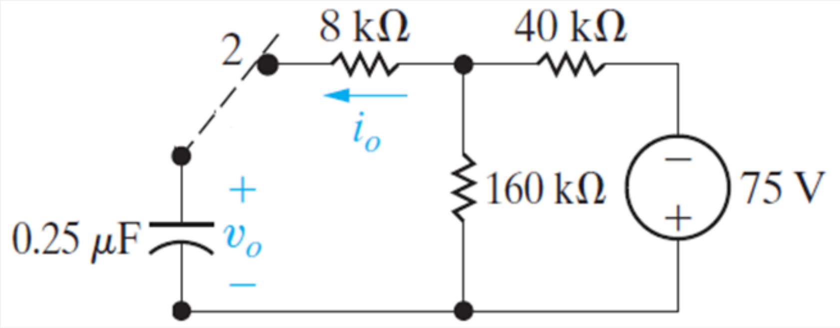
$$v_0(t) = -60 + [30 - (-60)]e^{-100t}$$

$$\boldsymbol{v_0(t) = -60 + 90e^{-100t}} \textbf{ V}, \qquad \text{t} \geq 0$$

(συνεχίζεται …)

Παράδειγμα 6.4 *(… συνέχεια)*

β) Βρείτε το $i_0(t)$ για $t \geq 0^+$



(γ) Το κύκλωμα για $t \geq 0$

Λύση Το ρεύμα στον πυκνωτή

$$i_0 = C\frac{dv_0}{dt}$$

βρίσκεται απλά παραγωγίζοντας την έκφραση

$$v_0(t) = -60 + 90e^{-100t} \text{ V}$$

για την τάση του πυκνωτή

$$i_0 = (0.25 \times 10^{-6})\frac{d}{dt}(-60 + 90e^{-100t})$$

$$\boldsymbol{i_0 = 2.25e^{-100t}\ \mathrm{mA}}$$

Πρόβλημα

a. Στο Multisim Live σχεδιάστε και προσομοιώστε τη λειτουργία του κυκλώματος του Παραδείγματος 6.4

b. Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα της λύσης του Παραδείγματος 6.4