

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι

Κεφάλαιο 5

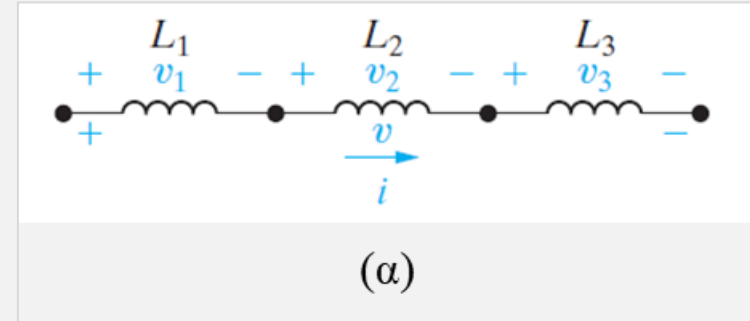
Επαγωγή και
χωρητικότητα

Γ'

- Σειριακοί και παράλληλοι συνδυασμοί επαγωγής και χωρητικότητας
- Αμοιβαία επαγωγή

Επαγωγείς (πηνία) σε σειρά

Εικ. (α), σειριακός συνδυασμός
επαγωγέων

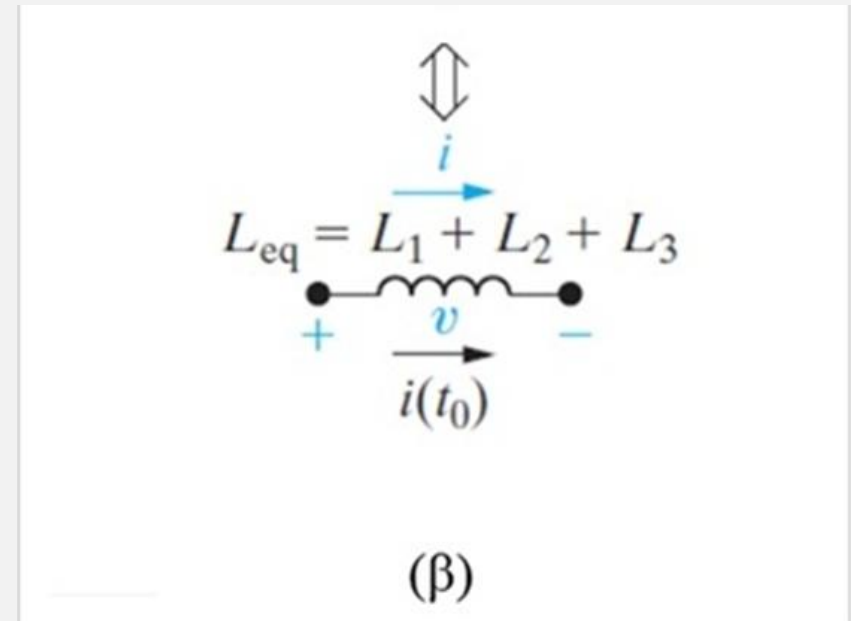


Εικ. (β), ισοδύναμο κύκλωμα επαγωγέων
σε σειρά

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3$$

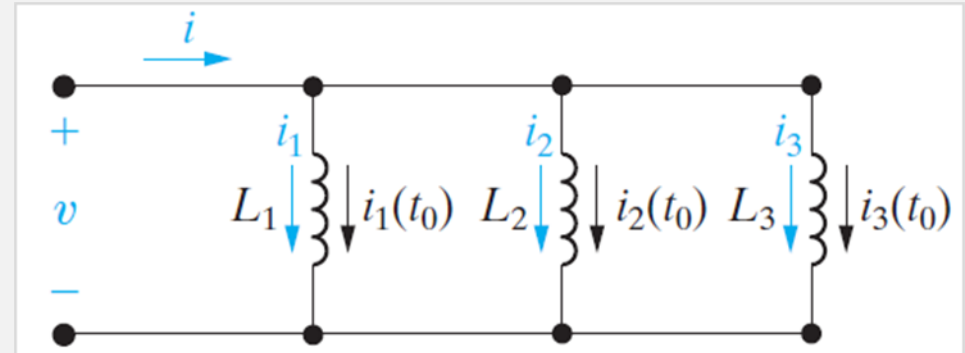
- Ρεύμα κοινό, $i_1 = i_2 = i_3 = i$
- Τάση από το νόμο τάσεων Kirchhoff,

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$



Παράλληλοι επαγωγείς

Εικ. (α), παράλληλος συνδυασμός επαγωγέων



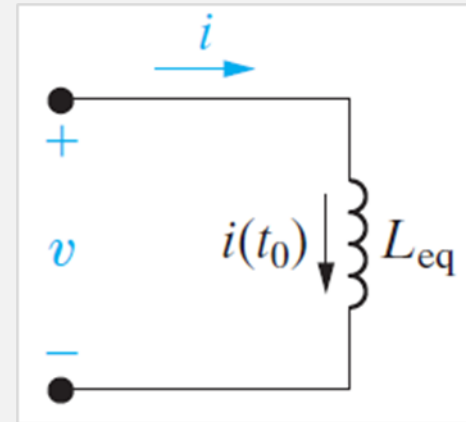
(α)

Εικ. (β), ισοδύναμο κύκλωμα επαγωγέων παράλληλα

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

- Αρχικό ρεύμα ισοδύναμου επαγωγέα από το νόμο ρευμάτων Kirchhoff,

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$



(β)

Πυκνωτές σε σειρά

Εικ. (α), πυκνωτές σε σειρά

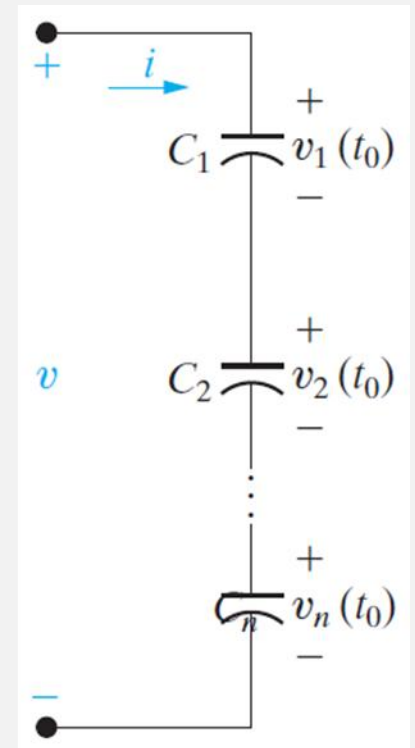
Εικ. (β), ισοδύναμη χωρητικότητα σειριακού συνδυασμού πυκνωτών

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

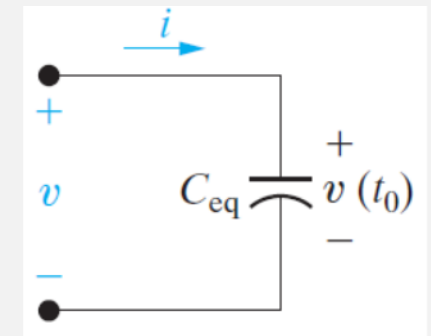
- Αρχική τάση ισοδύναμης χωρητικότητας από το νόμο ρευμάτων Kirchhoff,

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \dots + v_n(t_0)$$

(α)

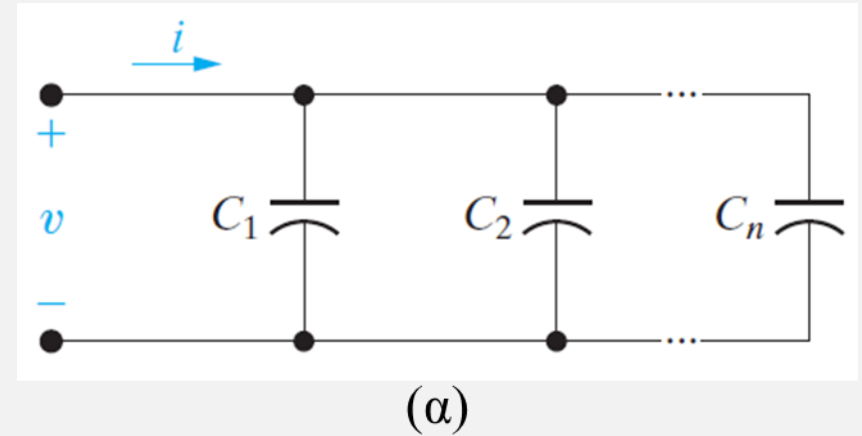


(β)



Παράλληλοι πυκνωτές

Εικ. (α), παράλληλος συνδυασμός πυκνωτών

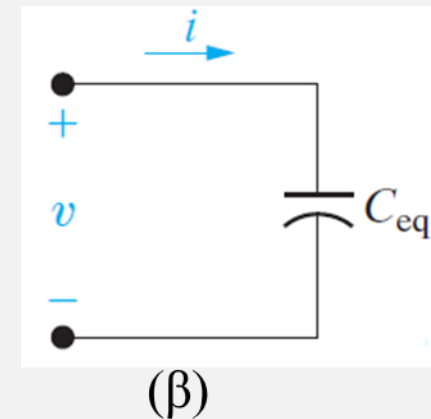


Εικ. (β), ισοδύναμο κύκλωμα παράλληλων πυκνωτών

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

- Αρχικό ρεύμα ισοδύναμου επαγωγέα από το νόμο ρευμάτων Kirchhoff,

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$

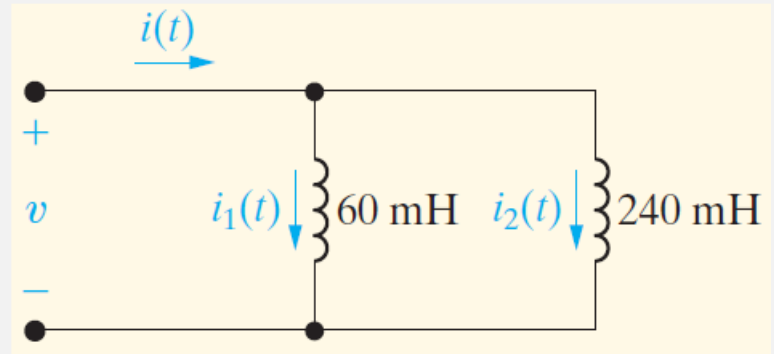


Παράδειγμα 5.7

Οι αρχικές τιμές των i_1 και i_2 στο κύκλωμα της εικόνας είναι $+3\text{ A}$ και -5 A , αντίστοιχα. Η τάση v στα άκρα των παράλληλων επαγωγών για $t \geq 0$ είναι $-30e^{-5t}\text{ mV}$.

(α) Αν οι παράλληλοι επαγωγείς αντικατασταθούν από έναν απλό επαγωγό, ποια είναι η τιμή του;

(β) Ποιο είναι το αρχικό ρεύμα και η φορά αναφοράς του στον ισοδύναμο επαγωγό;



Απάντηση

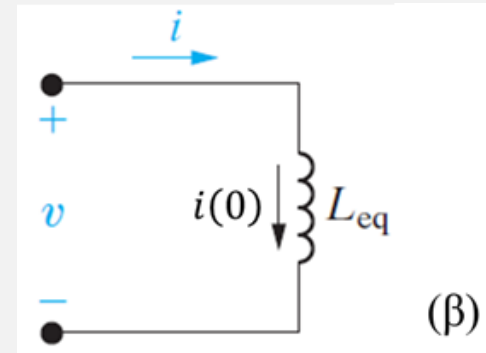
(α)

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{60\text{ mH}} + \frac{1}{240\text{ mH}}$$
$$L_{eq} = \mathbf{48\text{ mH}}$$

(β)

$$i(0) = i_1(0) + i_2(0)$$
$$= (+3\text{ A}) + (-5\text{ A}) = \mathbf{-2\text{ A}}$$

με βάση την φορά αναφοράς της εικ. (β).



(συνεχίζεται ...)

Παράδειγμα 5.7 (... συνέχεια)

(γ) Χρησιμοποιήστε τον ισοδύναμο επαγωγό για να βρείτε το $i(t)$.

Λύση

Το $i(t)$ στον ισοδύναμο επαγωγό, *εικ. (β)*, είναι

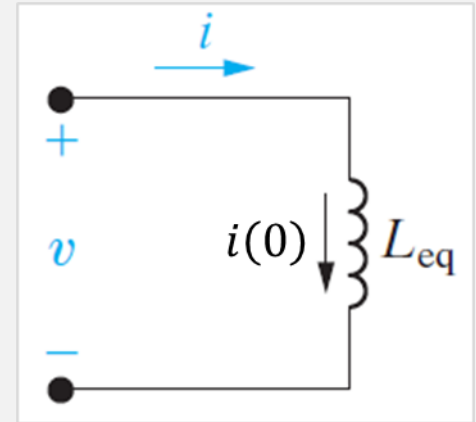
$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L_{eq}} \int_0^t v dt$$

$$i(t) = -2 + \frac{1}{48 \text{ mH}} \int_0^t (-30e^{-5t} \text{ mV}) dt$$

$$i(t) = -2 - \frac{30}{48 \text{ mH}} \left(-\frac{1}{5} e^{-5t} \text{ mV} \right) \Big|_0^t$$

$$i(t) = -2 + 0.125(e^{-5t} - 1) \text{ A}$$

$$i(t) = -2.125 + 0.125e^{-5t} \text{ A}$$



(β)

(συνεχίζεται ...)

Αμοιβαία επαγωγή

(Mutual inductance)

- Η αυτεπαγωγή (self-inductance) είναι η παράμετρος που σχετίζει την τάση που αναπτύσσεται (επάγεται) σε ένα κύκλωμα λόγω του χρονικά μεταβαλλόμενου ρεύματος στο ίδιο κύκλωμα.
- Τι συμβαίνει όταν το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα ενός κυκλώματος διέρχεται από ένα γειτονικό κύκλωμα; Δηλαδή, όταν τα δύο κυκλώματα είναι μαγνητικά συζευγμένα;
- Σε αυτήν την περίπτωση, η μεταβολή του ρεύματος στο ένα κύκλωμα θα επάγει μια τάση στο άλλο.
- Αμοιβαία επαγωγή είναι η παράμετρος που σχετίζει την τάση στο ένα κύκλωμα με το χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα στο άλλο.

Αυτεπαγωγή και αμοιβαία επαγωγή - Μαγνητικά συζευγμένα κυκλώματα

Αυτεπαγωγή πηνίου (L) = μαγνητική ροή μέσα από πηνίο (ϕ) ανά μονάδα ρεύματος του ίδιου του πηνίου (i)

$$L = \frac{\phi}{i}$$

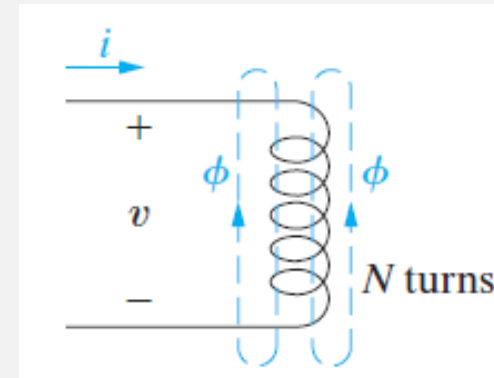
$$\Rightarrow \phi = Li$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Νόμος επαγωγής ή νόμος Faraday $d\phi/dt = v$

$$\Rightarrow v = L \frac{di}{dt}$$



(α)

Έστω δύο πηνία σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους

Το πηνίο 1 διαρρέεται από ρεύμα i_1

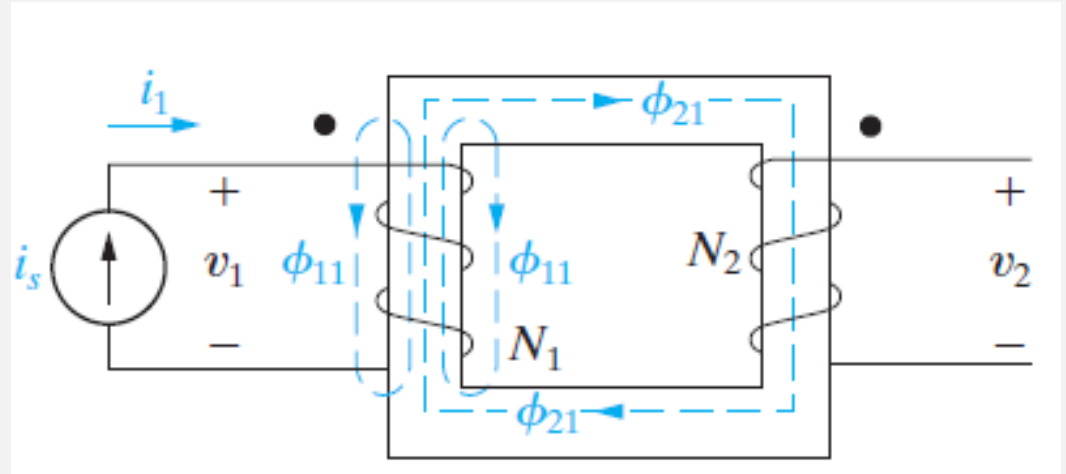
Αυτεπαγωγή του πηνίου 1 (L_1) = μαγνητική ροή μέσα από πηνίο 1 (ϕ_{11}) ανά μονάδα ρεύματος του ίδιου του πηνίου (i_1)

$$L_1 = \frac{\phi_{11}}{i_1}$$

Έστω ϕ_{21} η μαγνητική ροή μέσα από πηνίο 2 που οφείλεται στο ρεύμα i_1 του πηνίου 1

Αμοιβαία επαγωγή μεταξύ των πηνίων 1 και 2 (M ή M_{12}) = μαγνητική ροή μέσα από πηνίο 2 (ϕ_{21}) ανά μονάδα ρεύματος του άλλου πηνίου (i_1)

$$M = \frac{\phi_{21}}{i_1}$$



$$M = \frac{\phi_{21}}{i_1}$$

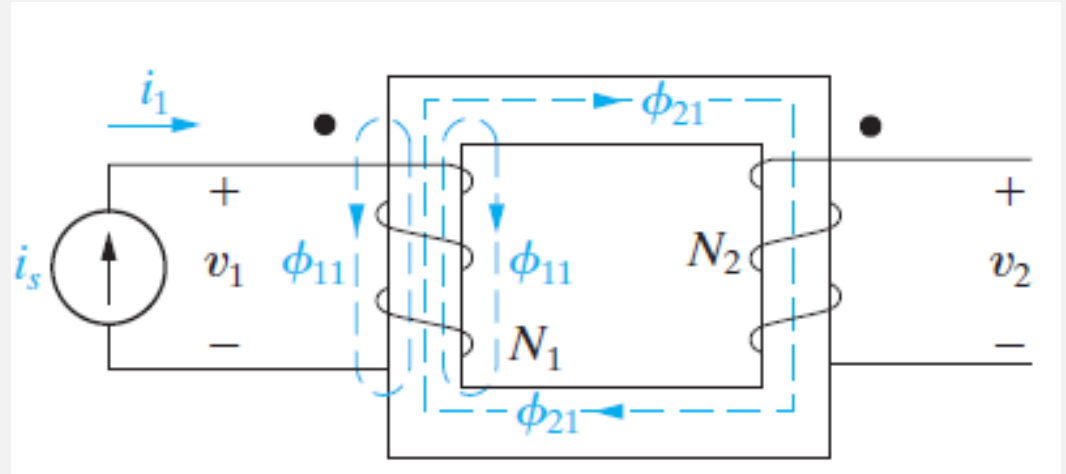
$$\Rightarrow \phi_{21} = Mi_1$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_{21}}{dt} = \frac{d(Mi_1)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_{21}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

Νόμος Faraday

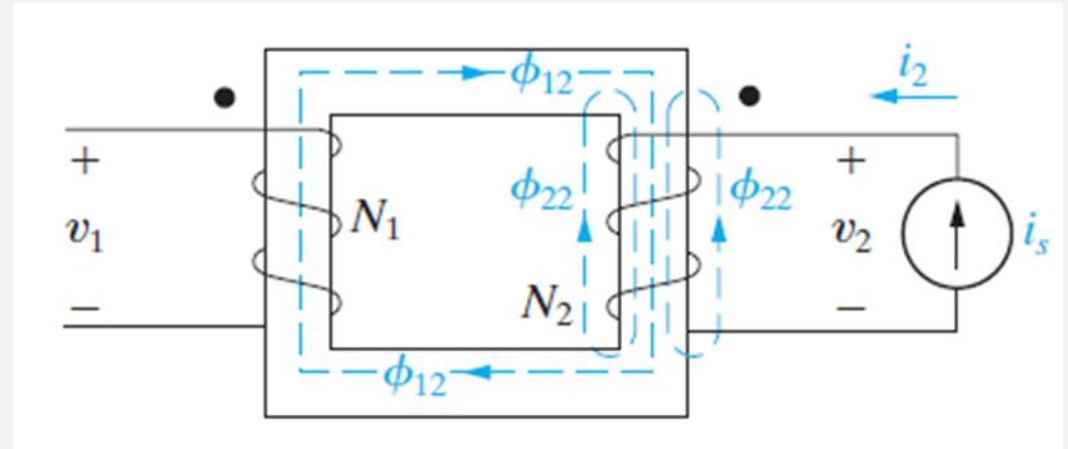
$$\Rightarrow v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$



Ομοίως, έστω το πηνίο 2 διαρρέεται από ρεύμα i_2

Αυτεπαγωγή του πηνίου 2 (L_2) = μαγνητική ροή μέσα από πηνίο 2 (ϕ_{22}) ανά μονάδα ρεύματος του ίδιου του πηνίου (i_2)

$$L_2 = \frac{\phi_{22}}{i_2}$$



Έστω ϕ_{12} η μαγνητική ροή μέσα από πηνίο 1 που οφείλεται στο ρεύμα i_2 του πηνίου 2

Αμοιβαία επαγωγή μεταξύ των πηνίων 1 και 2 (M) = μαγνητική ροή μέσα από πηνίο 1 (ϕ_{12}) ανά μονάδα ρεύματος του άλλου πηνίου (i_2)

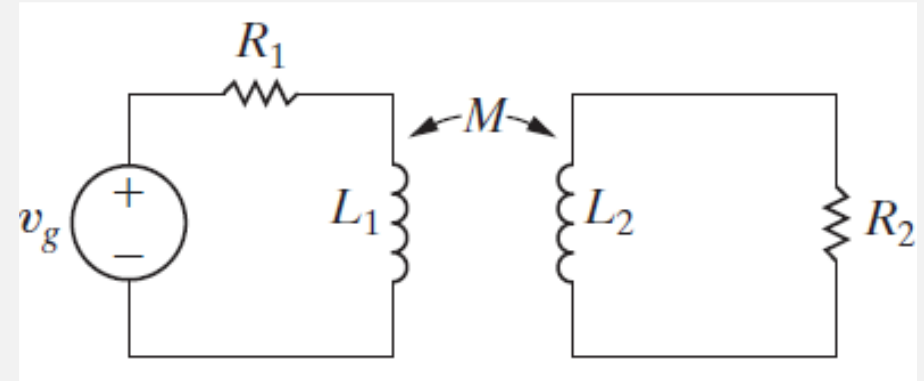
$$M = \frac{\phi_{12}}{i_2}$$

$$M = \frac{\phi_{12}}{i_2} = \frac{\phi_{21}}{i_1}$$

Μαγνητικά συζευγμένα κυκλώματα

Η *εικ. (α)* αντιπροσωπεύει δυο **μαγνητικά συζευγμένα πηνία** (magnetically coupled coils)

- L_1 L_2 εκφράζουν τις αυτεπαγωγές των δύο πηνίων
- M εκφράζει την αμοιβαία επαγωγή μεταξύ των δύο πηνίων
- Το διπλό βέλος δείχνει το ζεύγος των πηνίων με αυτή την αμοιβαία επαγωγή.

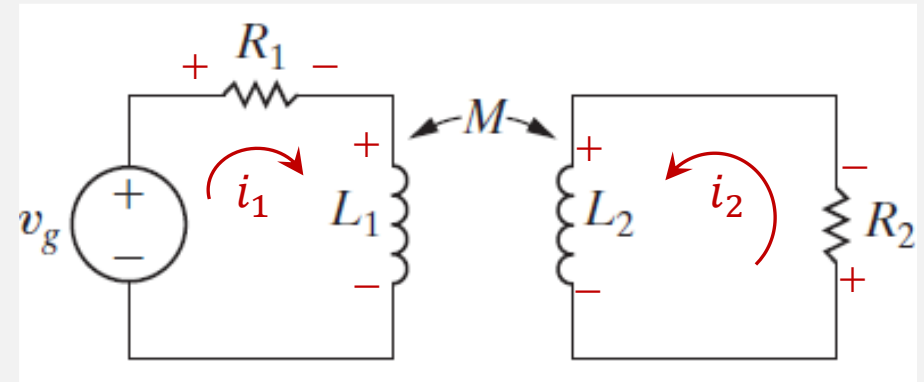


(α)

Αμοιβαία επαγωγή

Ο ευκολότερος τρόπος να αναλύσουμε κυκλώματα που περιλαμβάνουν αμοιβαία επαγωγή είναι με τα ρεύματα βρόχων.

- Πρώτα, επιλέγουμε τη φορά αναφοράς κάθε ρεύματος, αυθαίρετα, *εικ. (β)*.
- Αθροίζουμε τις πτώσεις τάσης γύρω από κάθε διαδρομή (βρόχο).
- Σε κάθε αντίσταση, η πτώση τάσης iR
- Λόγω αυτεπαγωγής και αμοιβαίας επαγωγής θα επάγονται δύο τάσεις σε κάθε πηνίο. Παράδειγμα, στο πηνίο L_1 :
 1. η τάση αυτεπαγωγής $L_1(di_1/dt)$ και
 2. η τάση λόγω αμοιβαίας επαγωγής $M(di_2/dt)$



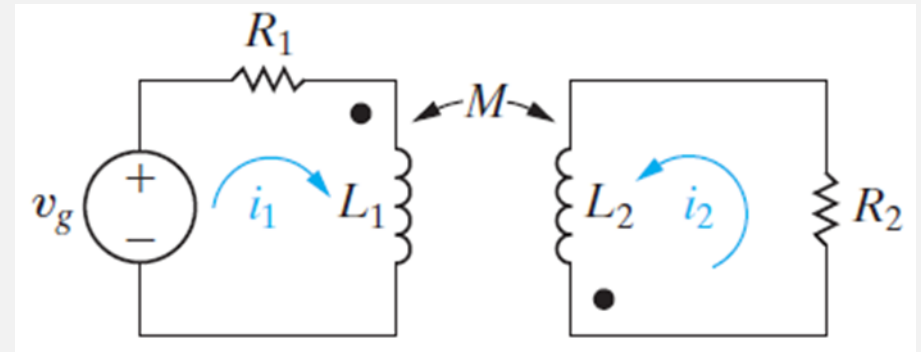
Ποια είναι, όμως, η πολικότητα της τάσης από αμοιβαία επαγωγή;

Πολικότητα τάσης αμοιβαίας επαγωγής

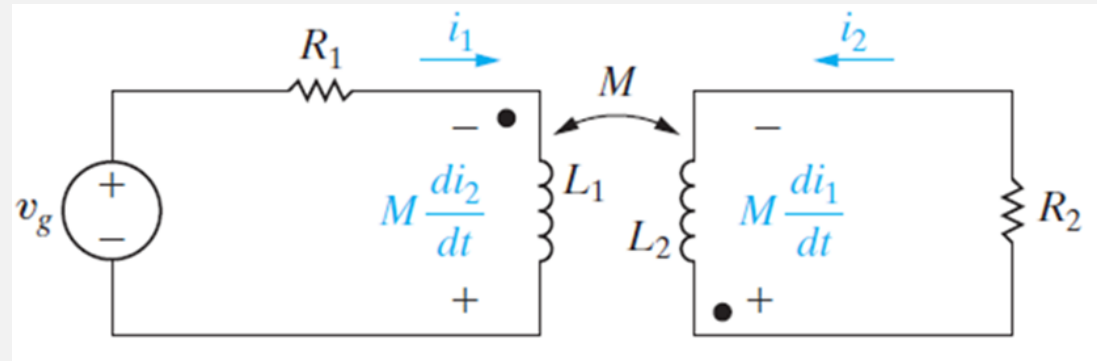
Η πολικότητα της τάσης από αμοιβαία επαγωγή εξαρτάται από τον τρόπο που είναι τυλιγμένα τα πηνία σε σχέση με τη φορά των ρευμάτων.

Για κάθε ζεύγος πηνίων, η πληροφορία αυτή δίνεται με τον λεγόμενο **κανόνα της τελείας (dot convention)**, *εικ. (γ)*.

*Όταν η φορά αναφοράς ενός ρεύματος εισέρχεται από το άκρο ενός πηνίου με την τελεία, η πολικότητα αναφοράς της τάσης που επάγεται στο άλλο πηνίο είναι θετική στο άκρο του (άλλου πηνίου) με την τελεία, *εικ. (δ)*.*

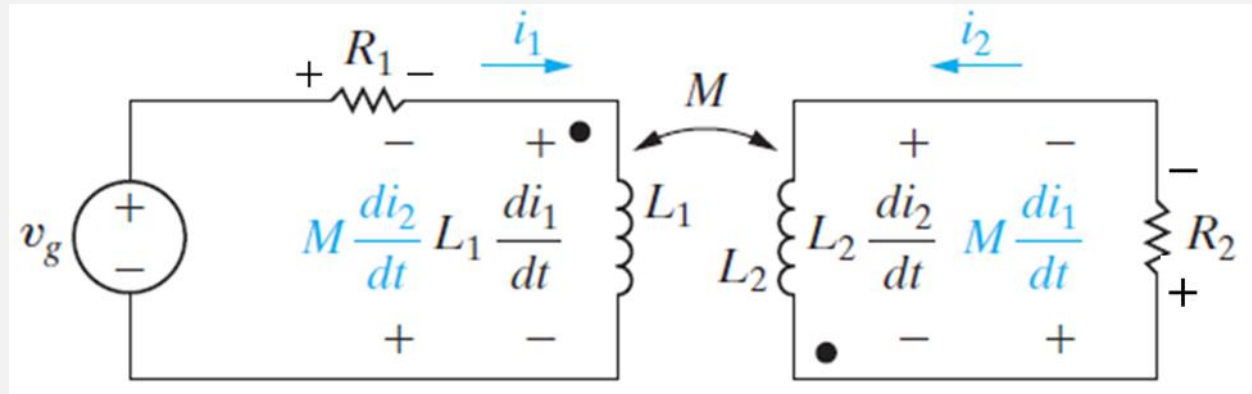


(γ)



(δ)

Εξισώσεις ρευμάτων βρόχων σε μαγνητικά συζευγμένα κυκλώματα



Για τη φορά των ρευμάτων που (αυθαίρετα) έχει επιλεγεί στο κύκλωμα της εικόνας οι εξισώσεις για τους δύο βρόχους γράφονται

για το βρόχο αριστερά

$$v_g - i_1 R_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0$$

για το βρόχο δεξιά

$$L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + i_2 R_2 = 0$$

Παράδειγμα 5.8

(α) Γράψτε ένα σύστημα εξισώσεων ρευμάτων βρόχων για το κύκλωμα της εικόνας. Είναι $i_g = 1.96 - 1.96e^{-4t}$ A

Λύση

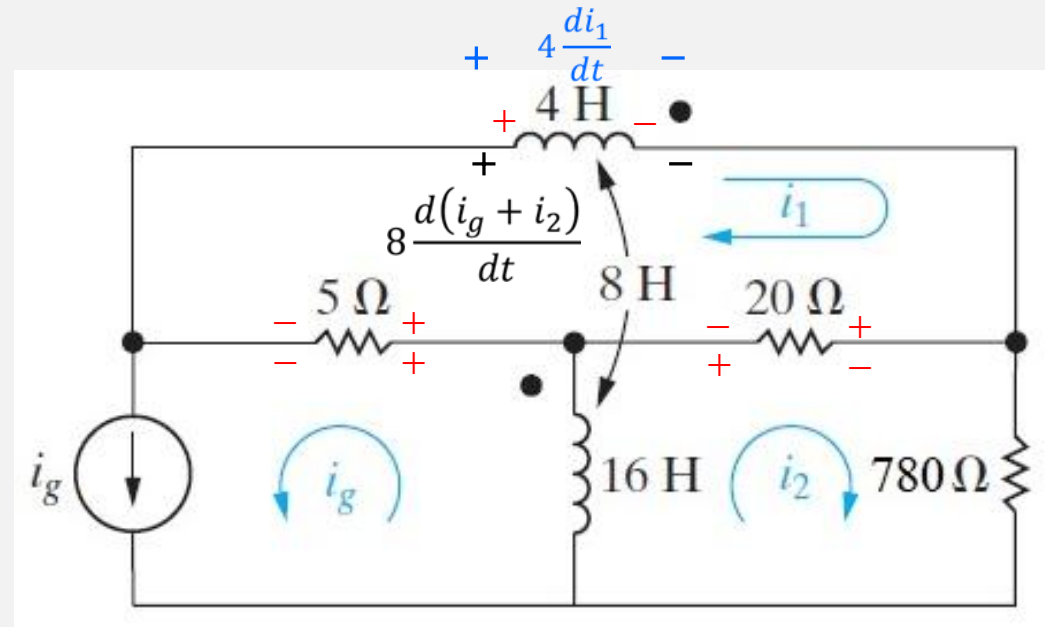
Στο βρόχο του ρεύματος i_1

- η τάση από αυτεπαγωγή στο πηνίο 4H είναι $4 \frac{di_1}{dt}$
- η τάση στο πηνίο 4H λόγω αμοιβαίας επαγωγής με το πηνίο 16H είναι $8 \frac{d(i_g + i_2)}{dt}$
- προσέξτε, το ρεύμα στο πηνίο 16H είναι $i_g + i_2$ και εξέρχεται από την άκρη με την τελεία
- σημειώνοντας και τις πτώσεις τάσης λόγω ωμικών αντιστάσεων

η εξίσωση γράφεται

$$-4 \frac{di_1}{dt} - 8 \frac{d(i_g + i_2)}{dt} - 20(i_1 - i_2) - 5(i_1 + i_g) = 0$$

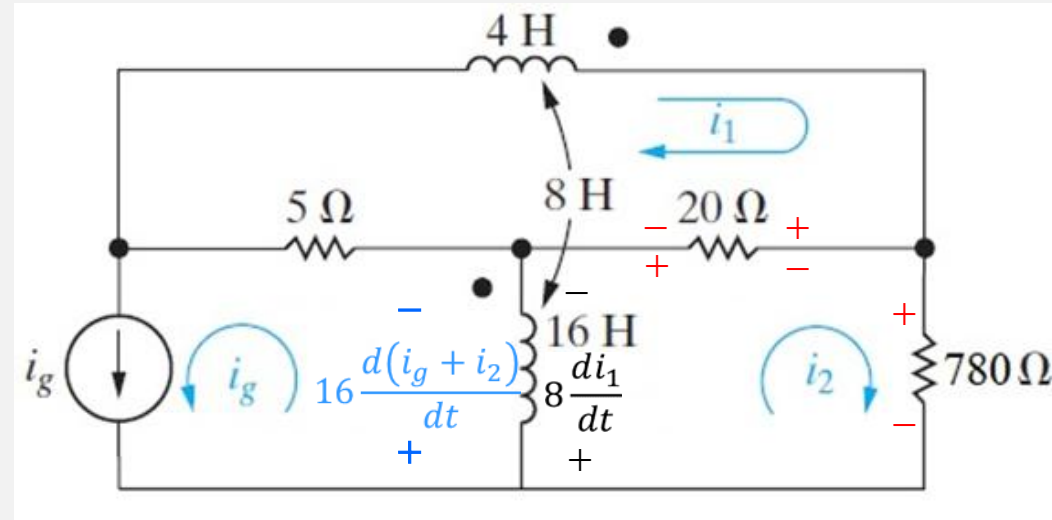
(συνεχίζεται ...)



Λύση (... συνέχεια)

Στο βρόχο του ρεύματος i_2

- η τάση από αυτεπαγωγή στο πηνίο 16H είναι $16 \frac{d(i_g + i_2)}{dt}$
- η τάση στο πηνίο 16H λόγω αμοιβαίας επαγωγής με το πηνίο 4H είναι $8 \frac{di_1}{dt}$
- προσέξτε, το ρεύμα στο πηνίο 4H είναι i_1 και εξέρχεται από την άκρη με την τελεία



Έτσι, για το βρόχο του ρεύματος i_2 η εξίσωση γράφεται

$$-780i_2 - 16 \frac{d(i_g + i_2)}{dt} - 8 \frac{di_1}{dt} - 20(i_2 - i_1) = 0$$

(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Το σύστημα των (διαφορικών) εξισώσεων για τα ρεύματα των δύο βρόχων είναι

$$4 \frac{di_1}{dt} + 8 \frac{d(i_g + i_2)}{dt} + 20(i_1 - i_2) + 5(i_1 + i_g) = 0$$

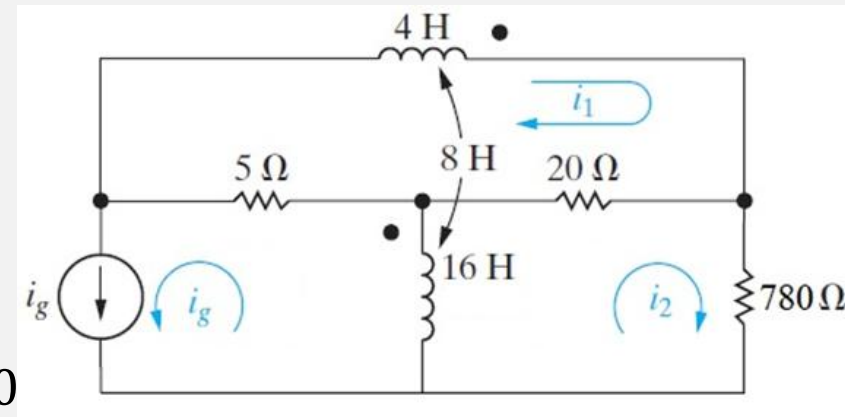
$$8 \frac{di_1}{dt} + 16 \frac{d(i_g + i_2)}{dt} + 780i_2 + 20(i_2 - i_1) = 0$$

Χωρίζοντας τους όρους με τα άγνωστα ρεύματα i_1 , i_2 και αντικαθιστώντας την έκφραση για το ρεύμα της πηγής $i_g = 1.96 - 1.96e^{-4t}$ A, παίρνουμε

$$4 \frac{di_1}{dt} + 25i_1 + 8 \frac{di_2}{dt} - 20i_2 = -9.8 - 52.92e^{-4t} \text{ A}$$

$$8 \frac{di_1}{dt} + 20i_1 - 16 \frac{di_2}{dt} - 800i_2 = -125.44e^{-4t} \text{ A}$$

(συνεχίζεται ...)



Παράδειγμα 5.8 (... συνέχεια)

(β) Αποδείξτε ότι, αν δεν υπάρχει ενέργεια αποθηκευμένη στο κύκλωμα για $t = 0$, οι λύσεις για τα ρεύματα i_1 και i_2 είναι

$$i_1 = -0.4 - 11.6e^{-4t} + 12e^{-5t} \text{ A}$$

$$i_2 = -0.01 - 0.99e^{-4t} + e^{-5t} \text{ A}$$

Λύση

Η απόδειξη γίνεται ελέγχοντας

- (1) τις αρχικές τιμές των i_1 και i_2 (δηλαδή, τις τιμές για $t = 0$)
- (2) τις τελικές τιμές τους (δηλαδή, μετά από άπειρο χρόνο, $t \rightarrow \infty$) και τέλος
- (3) αν επαληθεύουν τις (διαφορικές) εξισώσεις του κυκλώματος, βλ. ερώτημα (α).

Για $t = 0$, από την υπόθεση, πρέπει $i_1(0) = i_2(0) = 0$

Πράγματι,

$$i_1(0) = -0.4 - 11.6 + 12 = 0$$

$$i_2(0) = -0.01 - 0.99 + 1 = 0$$

(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Καθώς $t \rightarrow \infty$,

$$i_g = 1.96 - 1.96e^{-4t} \rightarrow 1.96 \text{ A}$$

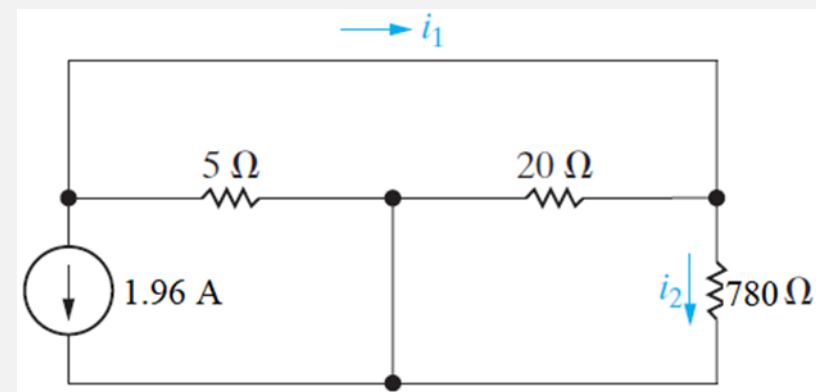
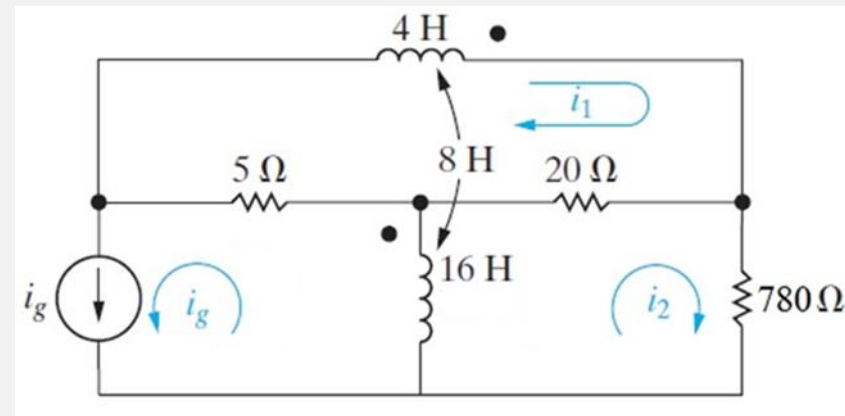
δηλαδή, το ρεύμα της πηγής τείνει στη dc τιμή 1.96 A οπότε τα πηνία συμπεριφέρονται σαν βραχυκυκλώματα.

Συνεπώς, για $t \rightarrow \infty$, το κύκλωμα γίνεται όπως στην εικ. (β).

Οι τρεις αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα στην πηγή 1.96 A (;;;). Η ολική αντίσταση είναι 3.98 Ω

Με τη σχέση διαιρέτη τάσης, υπολογίζουμε το i_2 (διαρρέει την 780 Ω)

$$i_2 = \frac{3.98}{780} (-1.96 \text{ A}) = -0.01 \text{ A}$$



(β)

(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

και το i_1 (διαρρέει τις $780\ \Omega$ και $20\ \Omega$) είναι

$$i_1 = \left(\frac{3.98}{780} + \frac{3.98}{20} \right) (-1.96\text{ A}) = -0.4\text{ A}$$

Πράγματι, οι λύσεις για τα ρεύματα i_1 και i_2

$$i_1 = -0.4 - 11.6e^{-4t} + 12e^{-5t}\text{ A}$$

$$i_2 = -0.01 - 0.99e^{-4t} + e^{-5t}\text{ A}$$

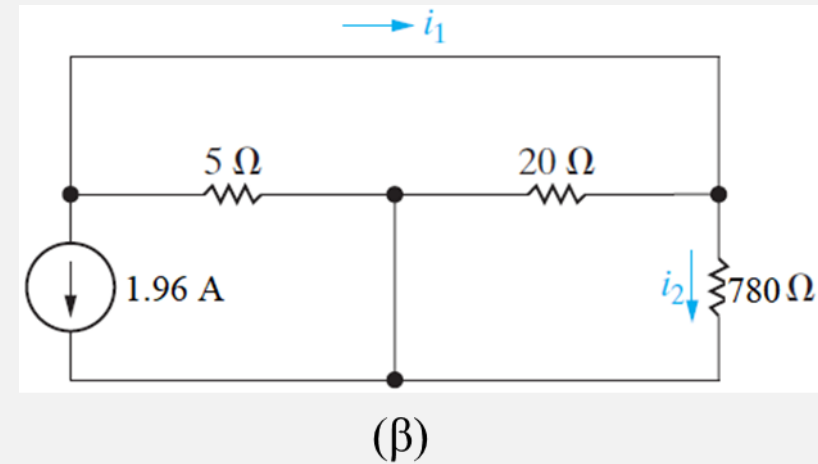
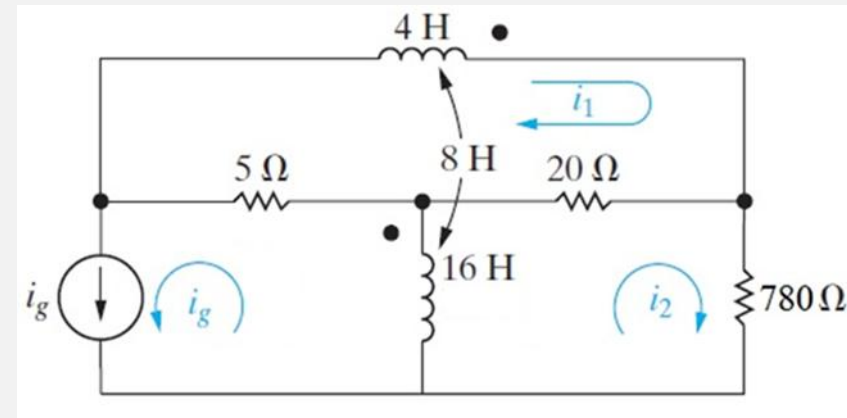
δίνουν

$$i_1(\infty) = -0.4\text{ A}$$

$$i_2(\infty) = -0.01\text{ A}$$

Άσκηση

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα i_1 , i_2 και $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_2}{dt}$ επαληθεύστε τις δύο εξισώσεις ρευμάτων βρόχων που βρήκαμε στο (α).



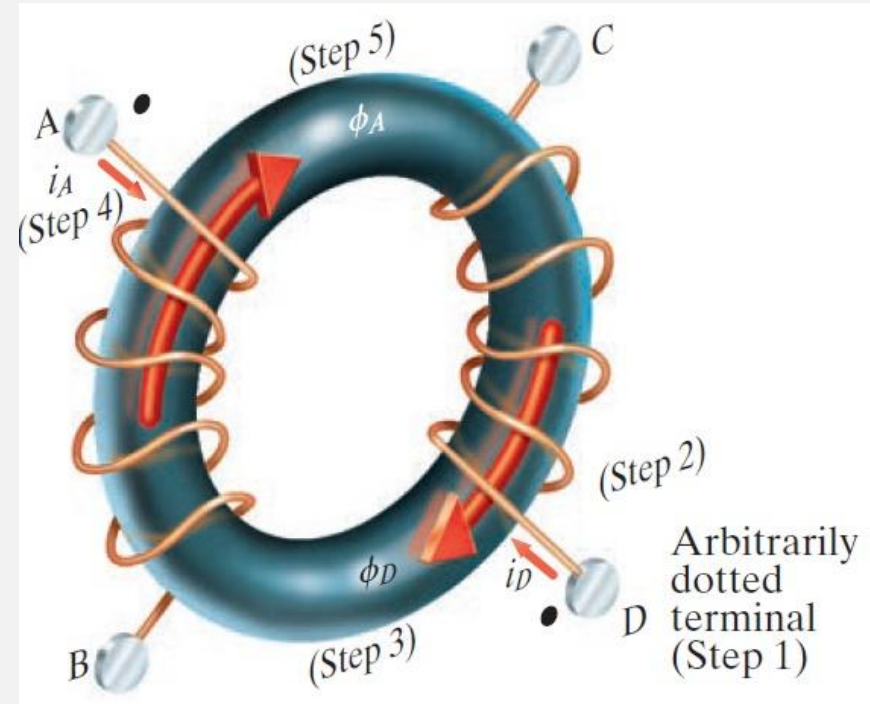
Προσδιορισμός των θέσεων των τελειών στους ακροδέκτες δύο μαγνητικά συζευγμένων πηνίων αν γνωρίζουμε τη διάταξή τους στο χώρο και τον τρόπο που είναι περιελιγμένα.

Βήμα 1: Επιλέγουμε αυθαίρετα να μαρκάρουμε με τελεία έναν ακροδέκτη ενός πηνίου. Έστω τον D του δεξιού πηνίου.

Βήμα 2: θεωρούμε ένα ρεύμα σε αυτόν τον ακροδέκτη. Ας το ονομάσουμε i_D .

Βήμα 3: Με τον κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το i_D στα δύο συζευγμένα πηνία. Έστω ϕ_D το πεδίο.

Βήμα 4: Αυθαίρετα επιλέγουμε έναν ακροδέκτη του άλλου πηνίου, έστω τον A και του βάζουμε ένα ρεύμα, έστω i_A .



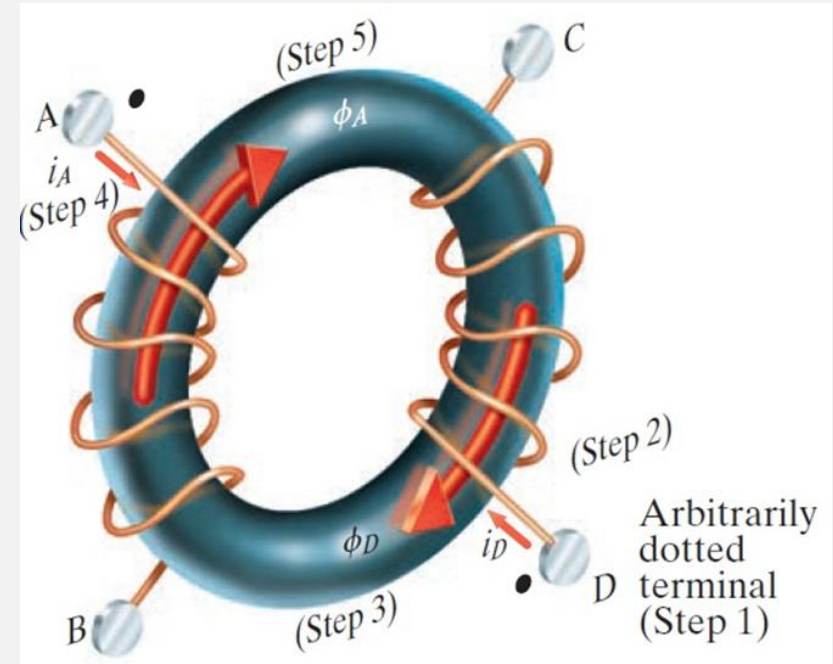
(συνέχεια ...)

(... συνεχίζεται)

Βήμα 5: Πάλι με τον κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το i_A στα δύο συζευγμένα πηνία. Έστω ϕ_A .

Βήμα 6: Συγκρίνουμε τις σχετικές διευθύνσεις των δύο μαγνητικών ροών ϕ_D και ϕ_A .

- Αν οι δυο ροές έχουν την ίδια διεύθυνση (όπως στην εικόνα), θέτουμε την τελεία στον ακροδέκτη του δεύτερου πηνίου όπου εισέρχεται το ρεύμα δοκιμής i_A .
- Αν οι δύο ροές είναι αντίθετων διευθύνσεων, θέτουμε την τελεία στον ακροδέκτη του δεύτερου πηνίου όπου από όπου εξέρχεται το ρεύμα δοκιμής i_A .



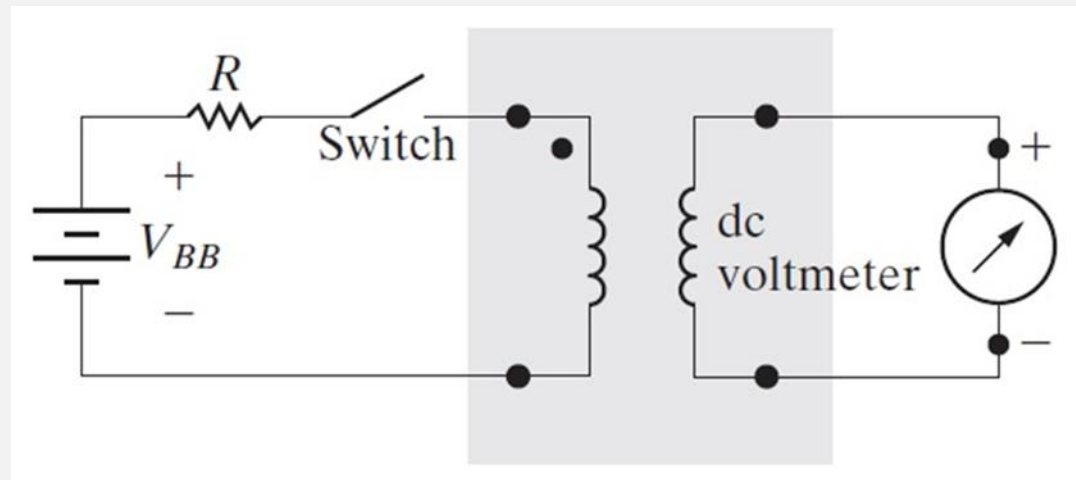
Πειραματική μέθοδος προσδιορισμού των θέσεων των τελειών στους ακροδέκτες δύο μαγνητικά συζευγμένων πηνίων.

Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν έχουμε εικόνα του τρόπου που τα δύο πηνία είναι περιελιγμένα (συνήθως σε έναν κοινό πυρήνα μαγνητικού υλικού).

Χρησιμοποιούμε μια πειραματική διάταξη όπως στην *εικ. (α)*.

Θέτουμε μια τελεία στον ακροδέκτη του πηνίου που συνδέεται με το θετικό πόλο της πηγής V_{BB} μέσω ενός διακόπτη (Switch) και μιας αντίστασης περιορισμού του ρεύματος (R , γιατί;).

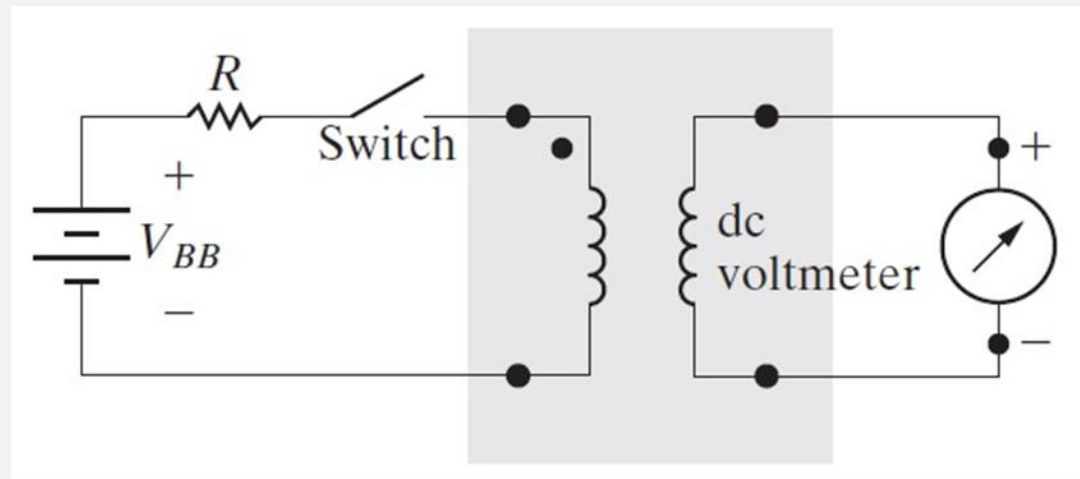
Κλείνουμε το διακόπτη και παρατηρούμε τη φορά απόκλισης του βολτομέτρου (dc voltmeter).



(συνέχεια ...)

(... συνεχίζεται)

- Αν η στιγμιαία απόκλιση του δείκτη του βολτομέτρου (ή η ένδειξη του ψηφιακού βολτομέτρου) είναι θετική, θέτουμε την τελεία στον ακροδέκτη του πηνίου που συνδέεται με το θετικό ακροδέκτη του βολτομέτρου
- Αν η στιγμιαία απόκλιση του βολτομέτρου είναι αρνητική, η τελεία πηγαίνει στον ακροδέκτη του πηνίου που είναι συνδεδεμένος με τον αρνητικό ακροδέκτη του βολτομέτρου.



(α)

Κάνετε μια προσομοίωση της πειραματικής μεθόδου προσδιορισμού των θέσεων των τελειών στους ακροδέκτες δύο μαγνητικά συζευγμένων πηνίων χρησιμοποιώντας το κύκλωμα

Experimental determination of polarity marks

στην ομάδα

ECE-UOWM MK18

στο Multisim Live