

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι
Κεφάλαιο 5

Επαγωγή και
χωρητικότητα

Β' Ο πυκνωτής (capacitor)

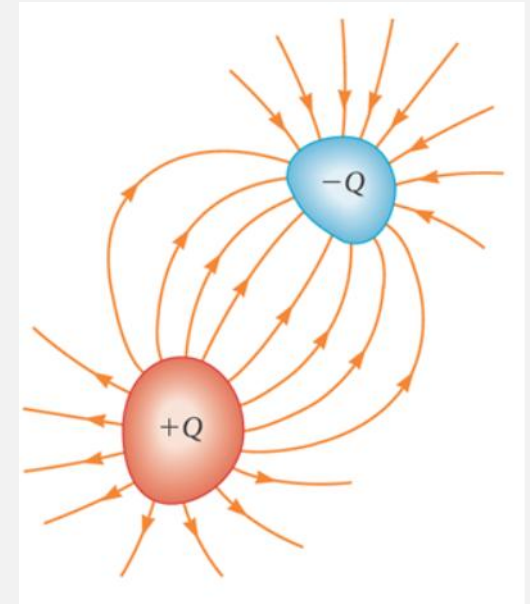
- Συμβολισμός και αναφορά τάσης και ρεύματος
- Η εξίσωση $v - i$ στον πυκνωτή
- Ισχύς και ενέργεια πυκνωτή

Πυκνωτής

- Ένα πυκνωτής (capacitor), γενικά, αποτελείται από δύο αγωγούς, εικ. (α). Οι αγωγοί αυτοί ονομάζονται πλάκες ή οπλισμοί.
- Όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος, τότε οι οπλισμοί φέρουν ίσα και αντίθετα φορτία, $\pm Q$.
- Λόγω του φορτίου, μεταξύ των οπλισμών υπάρχει διαφορά δυναμικού (τάση), V .
- Η χωρητικότητα (capacitance) C ενός πυκνωτή ορίζεται ως ο λόγος της απόλυτης τιμής του φορτίου ενός από τους δύο αγωγούς προς την τάση μεταξύ των αγωγών

$$C = \frac{Q}{V}$$

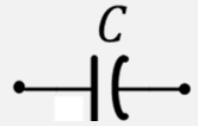
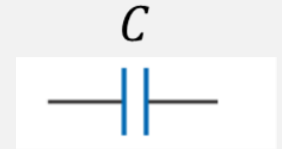
- Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή αποτελεί ένα μέτρο του φορτίου που μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής.



(α)

Σύμβολο και μονάδα χωρητικότητας πυκνωτή

- *Εικ. (α)*, σύμβολα πυκνωτή χωρητικότητας C
- Η μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας στο σύστημα SI είναι το farad (F).
- Η χωρητικότητα είναι πάντα θετική ποσότητα.
- Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή είναι σταθερή.



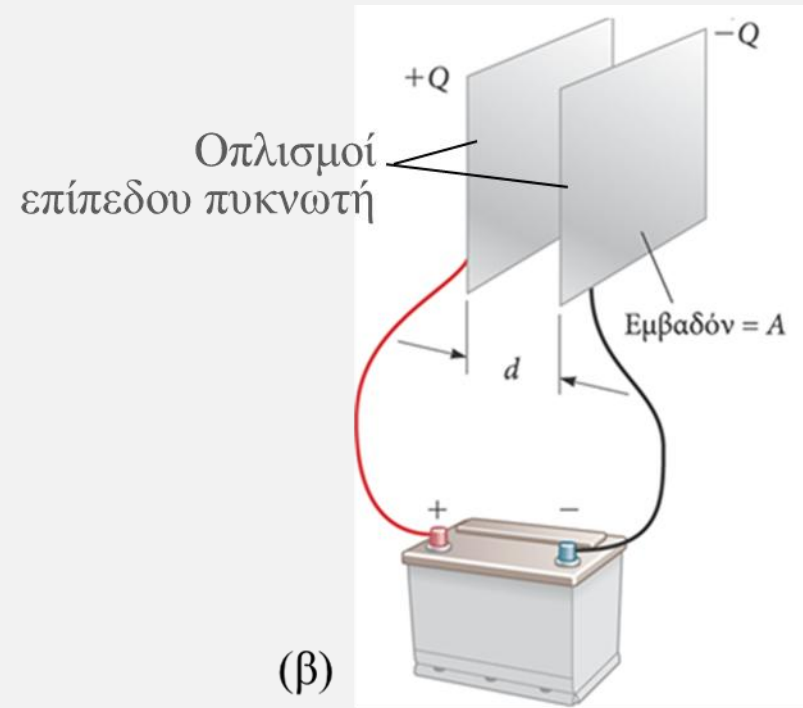
(α)

Παράδειγμα

Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή, *εικ. (β)*

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$$



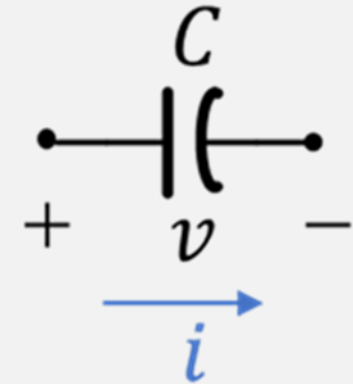
Η εξίσωση $i - v$ στον πυκνωτή

Εικ. (α): Πολικότητα της τάσης και φορά του ρεύματος σε έναν πυκνωτή

Η εξίσωση $i - v$ στον πυκνωτή

$$i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=Cv} i = \frac{d(Cv)}{dt} \Rightarrow i = C \frac{dv}{dt}$$

- v σε volt
- i σε ampere
- t σε second
- C σε farad: $1\text{F} = \frac{\text{C}}{\text{V}}$

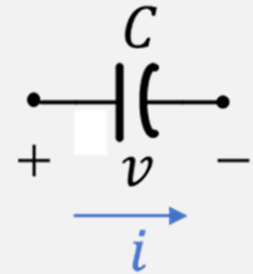


(α)

Συνέπειες της εξίσωσης $i - v$ στον πυκνωτή

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Το ρεύμα σε έναν πυκνωτή είναι ανάλογο της μεταβολής του τάσης στα άκρα του.



Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή δεν μπορεί να αλλάξει στιγμιαία. Δηλαδή, δεν μπορώ να έχω πεπερασμένη μεταβολή της τάσης ($dv \neq 0$) σε μηδενικό χρόνο ($dt = 0$).

Μια τέτοια στιγμιαία μεταβολή θα απαιτούσε άπειρο ρεύμα ($i \propto \frac{dv}{dt} \rightarrow \infty$);;

2. Όταν η τάση είναι σταθερή (σε dc κυκλώματα) το ρεύμα μέσω του πυκνωτή είναι μηδενικό.

Δηλαδή, ο πυκνωτής στο dc ρεύμα συμπεριφέρεται σαν ανοικτό κύκλωμα.

Η εξίσωση $v - i$ στον πυκνωτή

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow i dt = C dv$$

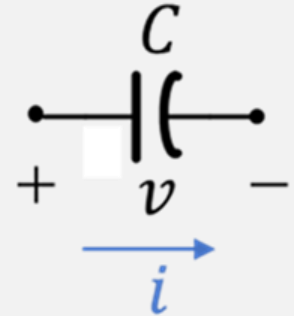
Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_o και t που η τάση έχει τιμές v_o και v , αντίστοιχα, έχουμε

$$\int_{v_o}^v C dv = \int_{t_o}^t i dt$$

$$C \int_{v_o}^v dv = \int_{t_o}^t i dt$$

$$v - v_o = \frac{1}{C} \int_{t_o}^t i dt$$

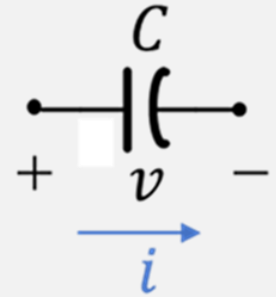
$$v = v_o + \frac{1}{C} \int_{t_o}^t i dt$$



Η ισχύς στον πυκνωτή

Η στιγμιαία ισχύς στον πυκνωτή

$$\left. \begin{array}{l} p = vi \\ i = C \frac{dv}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow p = Cv \frac{dv}{dt}$$



Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} p = vi \\ v = v_o + \frac{1}{C} \int_{t_o}^t i dt \end{array} \right\} \Rightarrow p = i \left[v_o + \frac{1}{C} \int_{t_o}^t i dt \right]$$

Η ενέργεια στον πυκνωτή

Η ισχύς, γενικά, είναι ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας w

$$p = \frac{dw}{dt}$$

Ισχύς σε πυκνωτή χωρητικότητας C

$$p = Cv \frac{dv}{dt}$$

Εξισώνοντας έχουμε

$$dw = Cvdv$$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

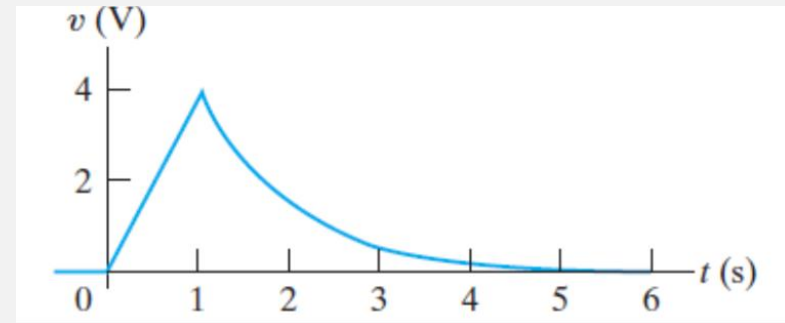
$$\int_0^w dw = C \int_0^v v dv$$

$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

Παράδειγμα 5.5 Υπολογισμός ρεύματος, τάσης, ισχύος και ενέργειας σε πυκνωτή

Ο παλμός τάσης

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 4t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 4e^{-(t-1)} \text{ V}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$



εφαρμόζεται στα άκρα ενός πυκνωτή $0.5 \mu\text{F}$.

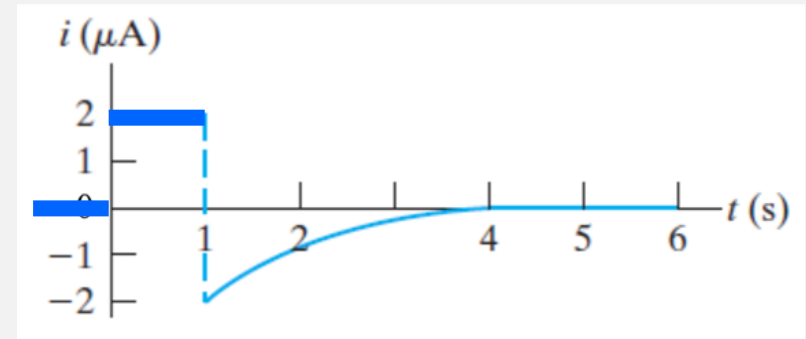
Βρείτε και σχεδιάστε τις εκφράσεις για το ρεύμα, την ισχύ και την ενέργεια του πυκνωτή

Λύση

Από την εξίσωση για το ρεύμα $i = C \frac{dv}{dt}$, έχουμε

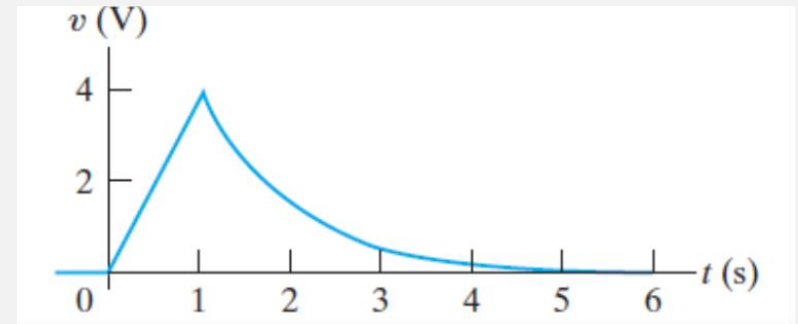
$$\text{— για } t \leq 0: \quad i = (0.5\mu\text{F}) \frac{d(0)}{dt} \Rightarrow i = 0 \text{ A}$$

$$\text{— για } 0 \leq t \leq 1: \quad i = (0.5\mu\text{F}) \frac{d(4t)}{dt} \Rightarrow i = (0.5\mu\text{F})4 \Rightarrow i = 2 \mu\text{A}$$



Λύση (συνέχεια)

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 4t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 4e^{-(t-1)} \text{ V}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

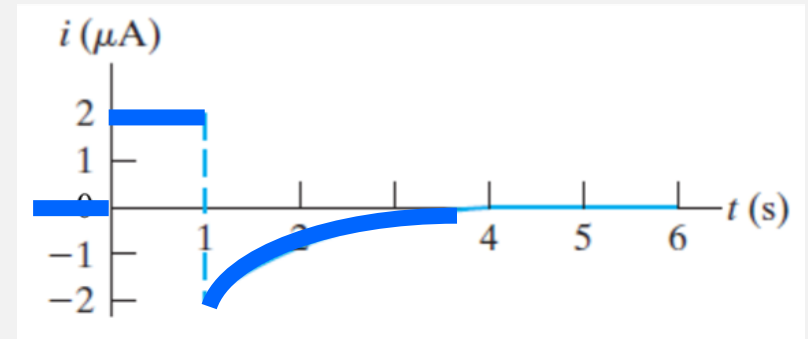


$$\text{για } 1 \leq t \leq \infty: i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow i = (0.5 \mu\text{F}) \frac{d(4e^{-(t-1)})}{dt}$$

$$\Rightarrow i = (0.5 \mu\text{F}) 4 \frac{d(e^{-(t-1)})}{dt}$$

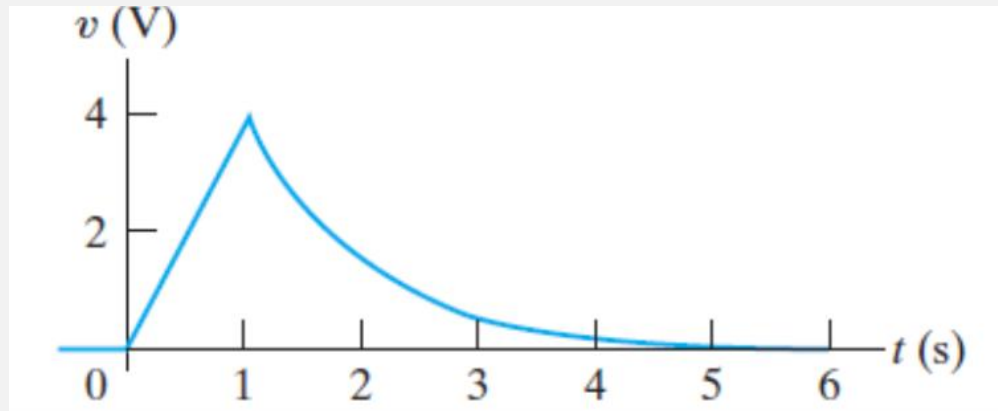
$$\Rightarrow i = (0.5 \mu\text{F}) 4 (-e^{-(t-1)})$$

$$\Rightarrow i = -2e^{-(t-1)} \mu\text{A}$$

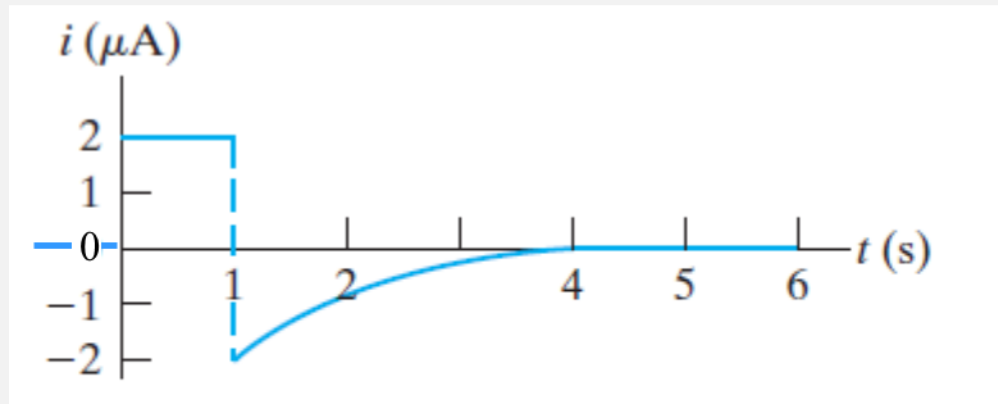


Λύση (... συνέχεια)

$$i(t) = \begin{cases} (0.5 \times 10^{-6})(0) = 0, & t \leq 0, \\ (0.5 \times 10^{-6})(4) = 2 \mu\text{A}, & 0 \leq t \leq 1 \\ (0.5 \times 10^{-6})(-4e^{-(t-1)}) = -2e^{-(t-1)} \mu\text{A}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$



Το γράφημα του ρεύματος στον πυκνωτή



(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Από τις εκφράσεις για την τάση και το ρεύμα

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 4t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 4e^{-(t-1)} \text{ V}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

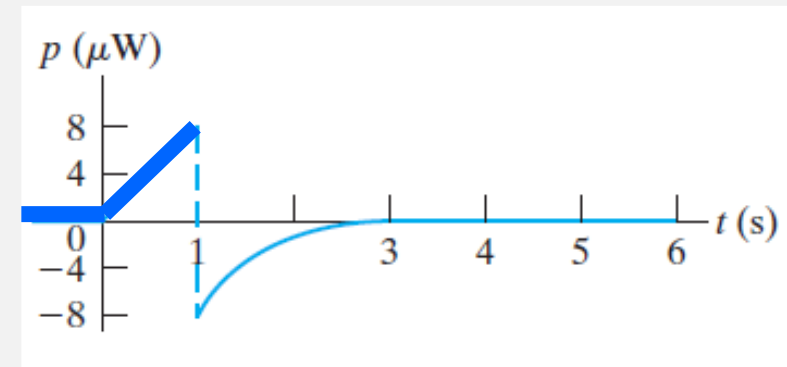
$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 2 \text{ } \mu\text{A}, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2e^{-(t-1)} \text{ } \mu\text{A}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

η εξίσωση για την ισχύ $p = vi$ δίνει

$$- \text{ για } t \leq 0: \quad p = vi \Rightarrow p = 0 \cdot 0 \Rightarrow p = 0$$

$$- \text{ για } 0 \leq t \leq 1: \quad p = vi \Rightarrow p = (4t \text{ V})(2\mu\text{A})$$

$$\Rightarrow p = 8t \text{ } \mu\text{W}$$

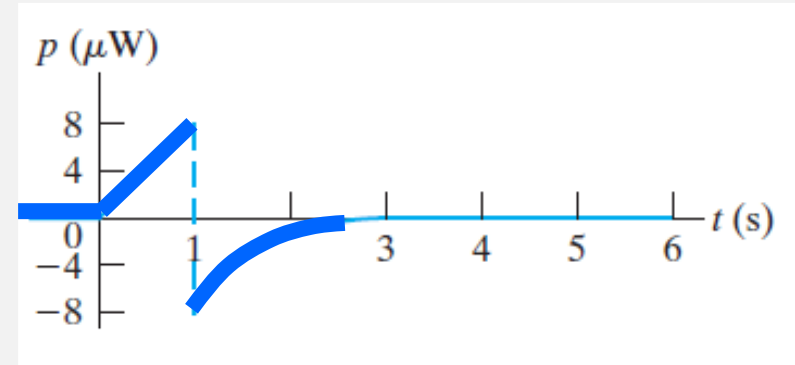


Λύση (... συνέχεια)

Από τις εκφράσεις για την τάση και το ρεύμα

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 4t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 4e^{-(t-1)} \text{ V}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 2 \text{ } \mu\text{A}, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2e^{-(t-1)} \text{ } \mu\text{A}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$



η εξίσωση για την ισχύ $p = vi$ δίνει

$$\text{— για } 1 \leq t \leq \infty : \quad p = vi \quad \Rightarrow \quad p = (4e^{-(t-1)} \text{ V})(-2e^{-(t-1)} \text{ } \mu\text{A})$$

$$\Rightarrow p = -8[e^{-(t-1)}]^2 \mu\text{W}$$

$$\Rightarrow p = -8e^{-2(t-1)} \mu\text{W}$$

Λύση (... συνέχεια)

Η έκφραση για την ενέργεια προκύπτει από την εξίσωση $w = \frac{1}{2} C v^2$

και την έκφραση για την τάση

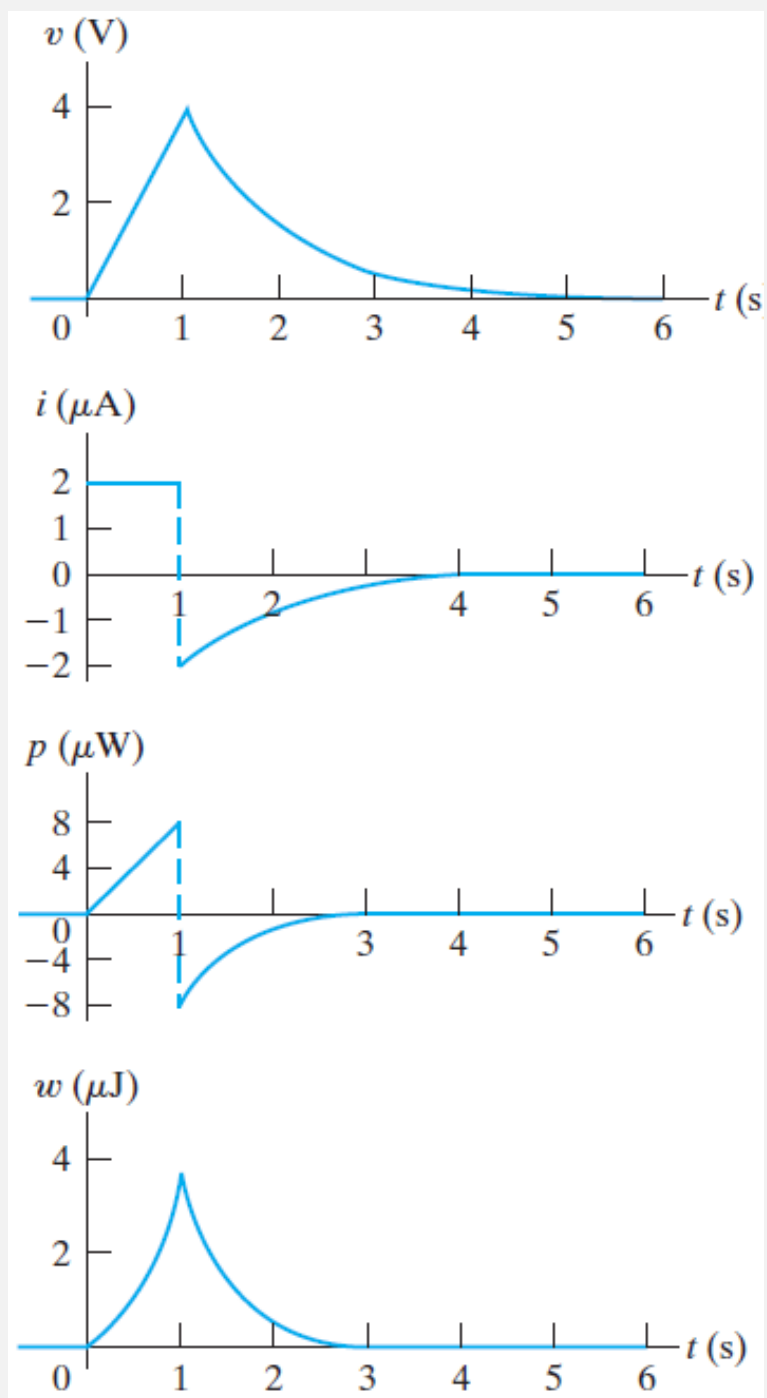
$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 4t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 4e^{-(t-1)} \text{ V}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

έχουμε

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{2} (0.5) 16 t^2 = 4 t^2 \text{ }\mu\text{J}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} (0.5) 16 e^{-2(t-1)} = 4 e^{-2(t-1)} \text{ }\mu\text{J}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)



(συνεχίζεται ...)

(β) Κατά τη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος αποθηκεύεται ενέργεια στον πυκνωτή;

Λύση

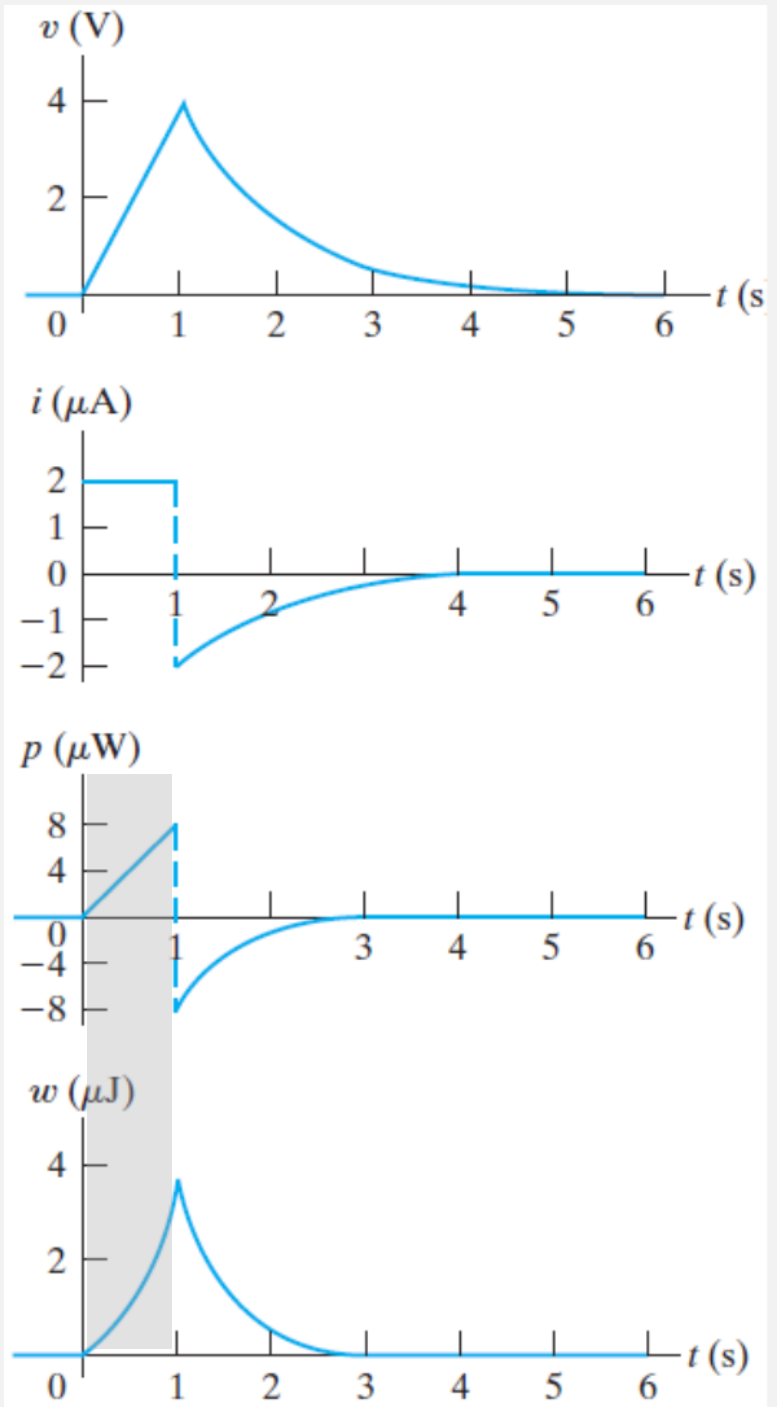
(β) Ενέργεια αποθηκεύεται στον πυκνωτή, όταν η ισχύς είναι θετική, $p > 0$

ή

η καμπύλη της ενέργειάς του $w(t)$ είναι αύξουσα.

Αυτό συμβαίνει στο διάστημα 0 ως 1 s.

(συνεχίζεται ...)



(γ) Κατά τη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος ο πυκνωτής αποβάλλει ενέργεια;

Λύση

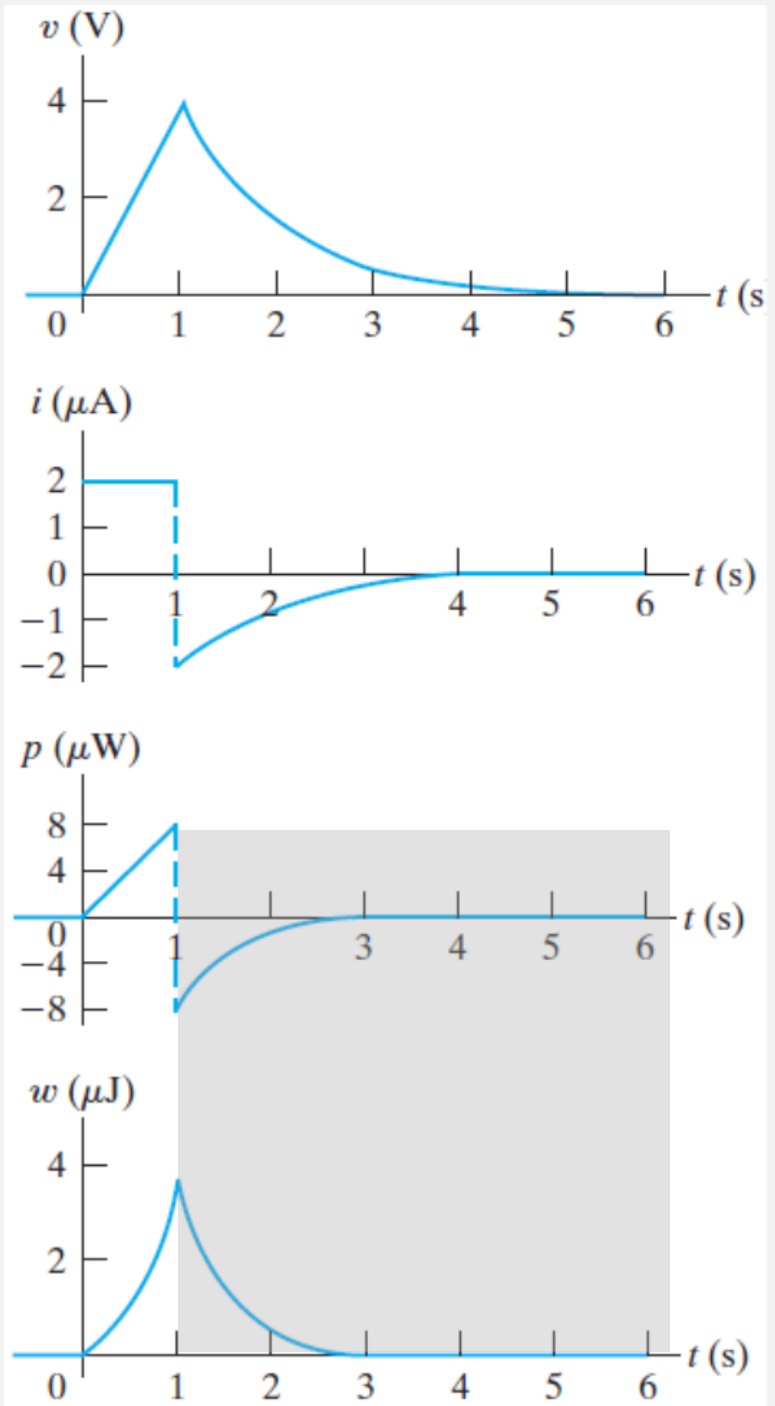
(γ) Ενέργεια αποβάλλεται από τον πυκνωτή, όταν η ισχύς είναι αρνητική, $p < 0$

ή

η καμπύλη της ενέργειάς του $w(t)$ είναι φθίνουσα.

Αυτό συμβαίνει για $t \geq 1$ s.

(συνεχίζεται ...)



(δ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 p dt$ και $\int_1^\infty p dt$

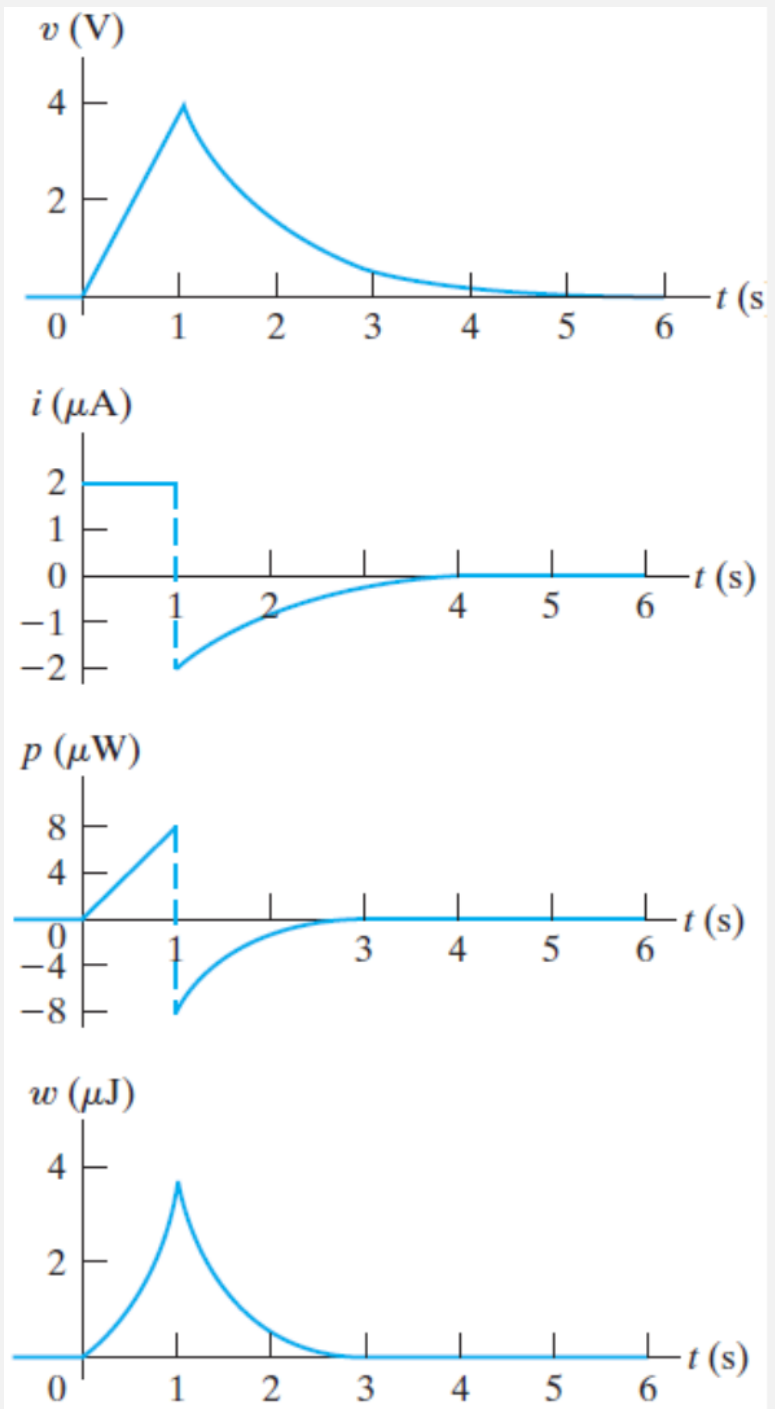
Λύση

(δ) Το ολοκληρώματα $\int_0^1 p dt$ εκφράζει τη συνολική ενέργεια φόρτισης του πυκνωτή

$$\int_0^1 p dt = \int_0^1 8t dt = 4t^2 \Big|_0^1 = 4 \mu\text{J}$$

Προφανώς, η τιμή του ολοκληρώματος $\int_1^\infty p dt$ αντιστοιχεί στη συνολική ενέργεια που αποβάλλει ο πυκνωτής που σε μέτρο είναι ίση με την ενέργεια που πήρε κατά τη φόρτιση

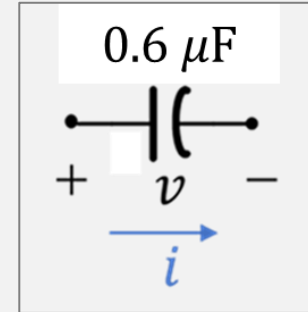
$$\int_1^\infty p dt = - \int_0^1 p dt = -4 \mu\text{J}$$



Παράδειγμα 5.6

Το ρεύμα στον πυκνωτή $0.6 \mu\text{F}$ της εικόνας είναι

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3 \cos 50000t \text{ A}, & t \geq 0 \end{cases}$$



βρείτε

(α) $v(t)$,

(β) τη μέγιστη ισχύ που αποδίδεται στον πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή,

(γ) τη μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή.

Λύση

(α) Από την εξίσωση για την τάση στον πυκνωτή $v = v_o + \frac{1}{C} \int_{t_o}^t i dt$, θεωρώντας τον αρχικά αφόρτιστο ($v_o = 0$ για $t < 0$), έχουμε

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0 + \frac{1}{0.6 \times 10^{-6}} \int_0^t 3 \cos 50000t \, dt \text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (5 \times 10^6) \int_0^t \cos 50000t \, dt \text{ }^* \text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ }^* \int \cos \alpha t \, dt = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 100 \sin 50000t \Big|_0^t \text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 100 \sin 50000t \text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

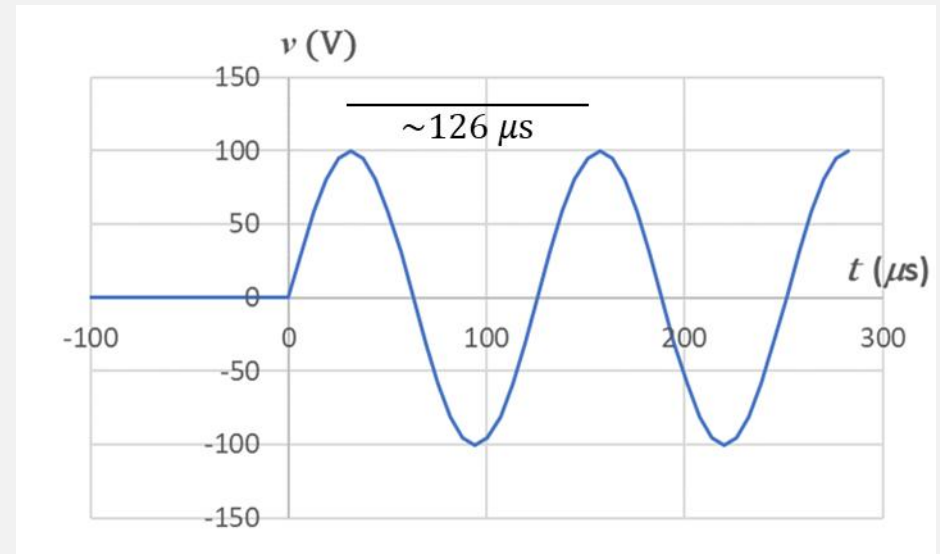
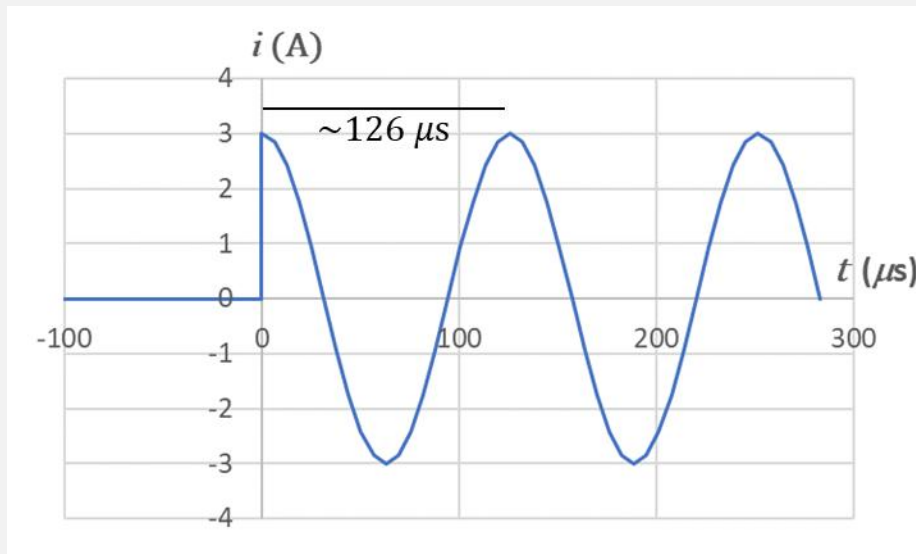
(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Οι κυματομορφές ρεύματος και τάσης είναι

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3 \cos 50000t \text{ A}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 100 \sin 50000t \text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$



(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

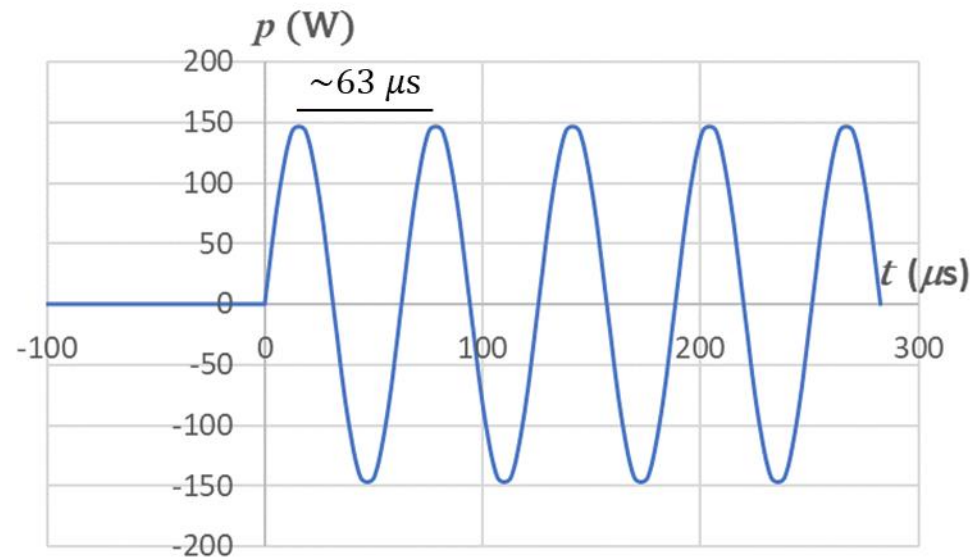
(β) Από τις εκφράσεις για το ρεύμα και την τάση βρίσκουμε την ισχύ $p = vi$

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (3 \cos 50000t)(100 \sin 50000t) \text{ W}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{300}{2} \sin 100000t \text{ W}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 150 \sin 100000t \text{ W}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή της ισχύος στον πυκνωτή είναι $P_{max} = 150 \text{ W}$

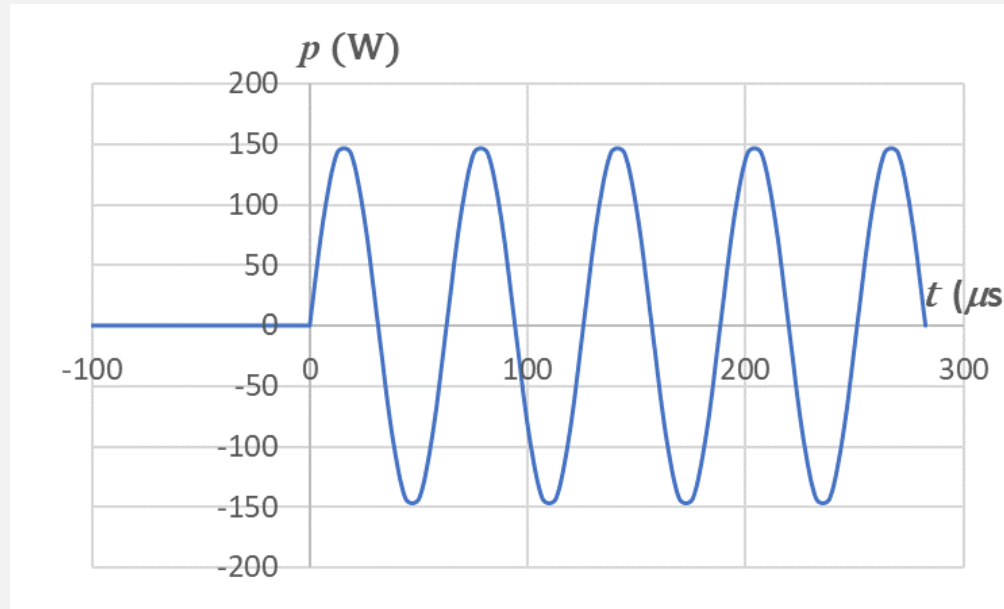


$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 150 \sin 100000t \text{ W}, & t \geq 0 \end{cases}$$



Ερωτήσεις

1. Ποιες χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστη η ισχύς που αποδίδεται στον πυκνωτή;
2. Τι συμβαίνει τις χρονικές στιγμές που η κυματομορφή ισχύος έχει τις ελάχιστες τιμές της;

(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

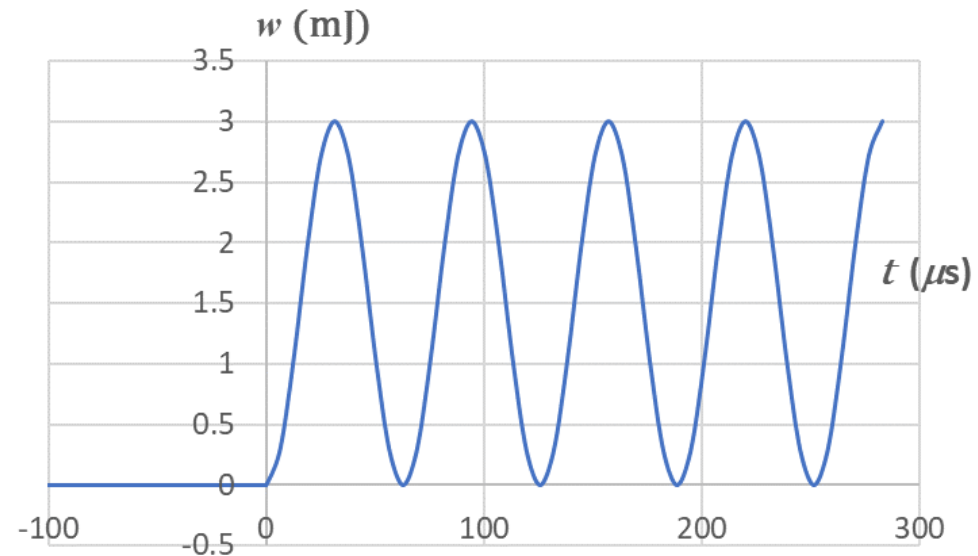
(γ) Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή είναι $w = \frac{1}{2} C v^2$

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} (0.6 \times 10^{-6}) (100 \sin 50000t)^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

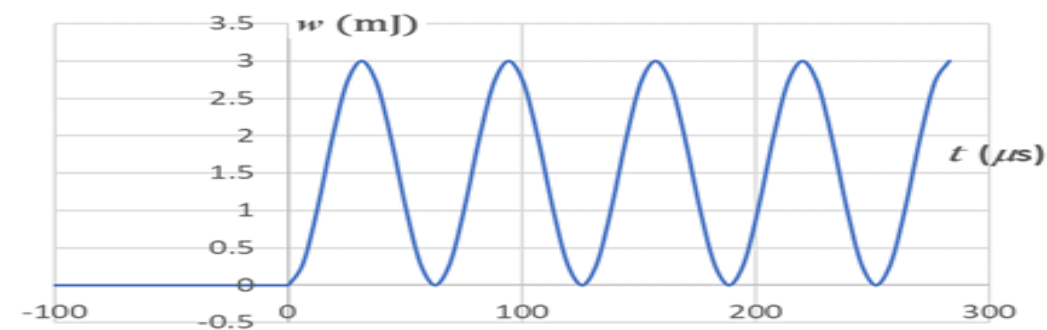
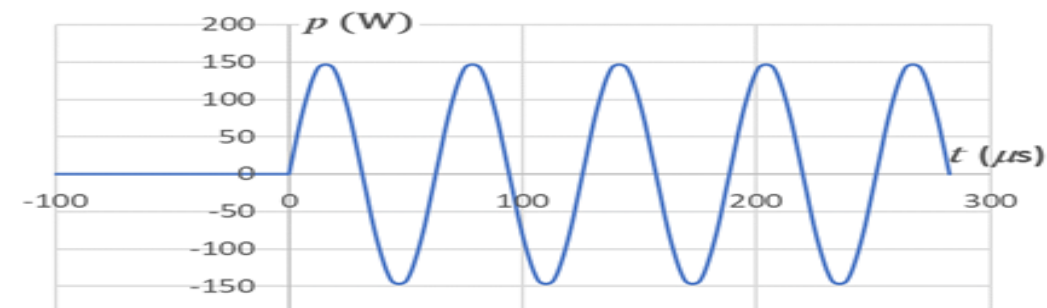
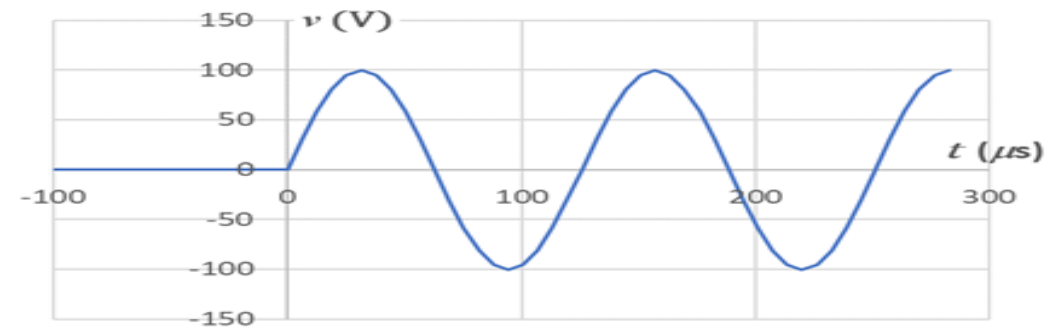
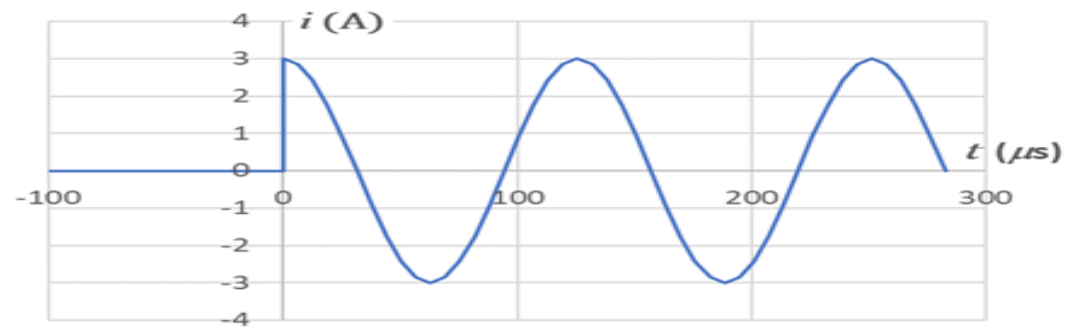
$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3 \sin^2 50000t \text{ mJ}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Η μέγιστη τιμή που παίρνει η αποθηκευμένη ενέργεια

είναι **$W_{\max} = 3 \text{ mJ}$**



(συνεχίζεται ...)



Έλεγε την απάντηση στο Παράδειγμα 5.6 με το κύκλωμα

Example 5_6

στο MultisimLive group

ECE-UOWM MK18