

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι
Κεφάλαιο 5

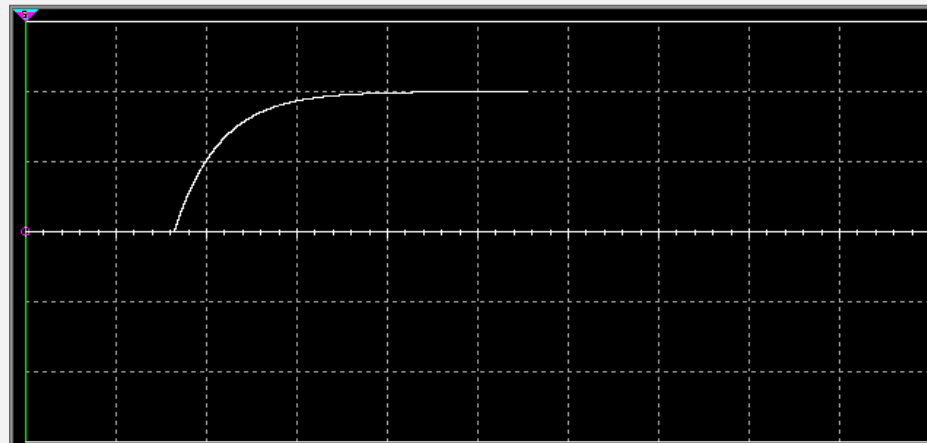
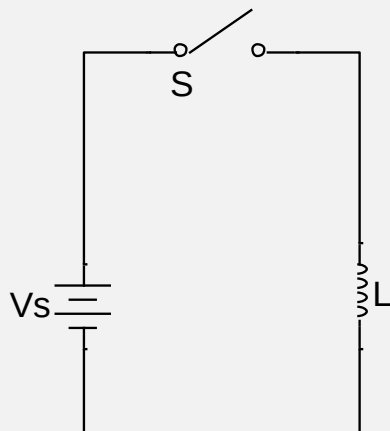
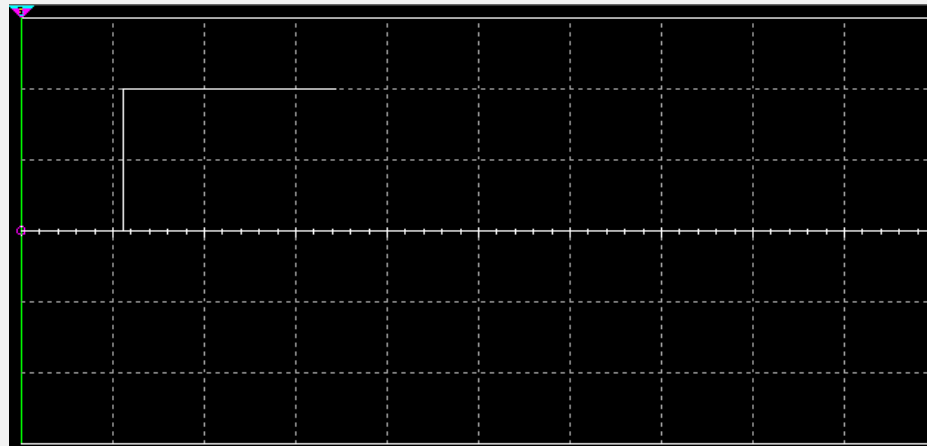
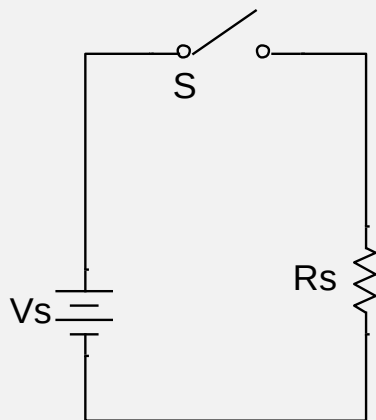
Επαγωγή και
χωρητικότητα

Α' Ο επαγωγός (inductor) ή πηνίο (coil)

- Συμβολισμός και αναφορά τάσης και ρεύματος
- Η εξίσωση $v - i$ σε ένα πηνίο
- Η ισχύς σε ένα πηνίο

Επαγωγός: Γιατί να τον εισάγουμε σε ένα κύκλωμα (πέραν των πηγών και της αντίστασης); Τι είναι;

- Γιατί; Επειδή σε ένα κύκλωμα, όταν μεταβάλλεται απότομα η τάση, το ρεύμα δεν μπορεί να πάρει αμέσως την τελική του μορφή που δίνεται από το νόμο του Ohm $I = V/R$ θεωρώντας μόνο την ωμική αντίσταση στο κύκλωμα.

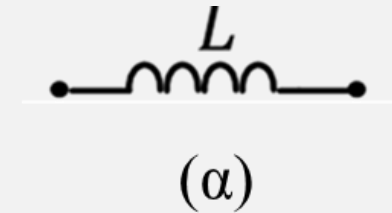


- Αυτήν την ‘αδράνεια’ του κυκλώματος σε μεταβολές του ρεύματος ονομάζουμε επαγωγή (induction) ή αυτεπαγωγή (self-indiction) του κυκλώματος.
- Η επαγωγή οφείλεται σε φαινόμενα που σχετίζονται με τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούν τα ρεύματα των κυκλωμάτων.
- Η μελέτη της επαγωγής είναι αντικείμενο του Ηλεκτρομαγνητισμού.
- Για τις ανάγκες της ανάλυσης κυκλωμάτων, μας αρκεί να τη συμβολίσουμε σαν ένα στοιχείο.
- Το στοιχείο αυτό ονομάζουμε επαγωγό (inductor), η τιμή του L είναι η επαγωγή του κυκλώματος και το σύμβολό του είναι το πηνίο (διότι, από όλες τις μορφές αγωγών, τα πηνία παρουσιάζουν εντονότερα το φαινόμενο της επαγωγής)

Η εξίσωση $v - i$ στον επαγωγό

Εικ. (α), γραφικό σύμβολο επαγωγού

- L είναι η επαγωγή του κυκλώματος
- Μονάδα: henry (H)

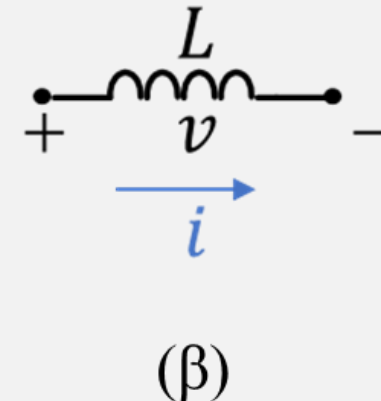


Εικ. (β), πολικότητα αναφοράς της τάσης και φορά αναφοράς του ρεύματος σε έναν επαγωγό

Η εξίσωση $v - i$ στον επαγωγό

$$v = L \frac{di}{dt}$$

- v σε volt
- i σε ampere
- t σε second
- L σε henry: $1\text{H} = \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}}$



Συνέπειες της εξίσωσης $v - i$ επαγωγής

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Η τάση που αναπτύσσεται στα άκρα ενός επαγωγού είναι ανάλογη της μεταβολής του ρεύματος σε αυτόν.

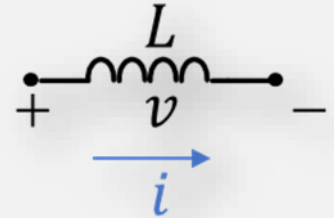
Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Σε έναν επαγωγό, το ρεύμα δεν μπορεί να αλλάξει στιγμιαία. Δηλαδή, δεν μπορώ να έχω πεπερασμένη μεταβολή του ρεύματος ($di \neq 0$) σε μηδενικό χρόνο ($dt = 0$).

Μια τέτοια στιγμιαία μεταβολή θα απαιτούσε άπειρη τάση ($v \propto \frac{di}{dt} \rightarrow \infty$);;

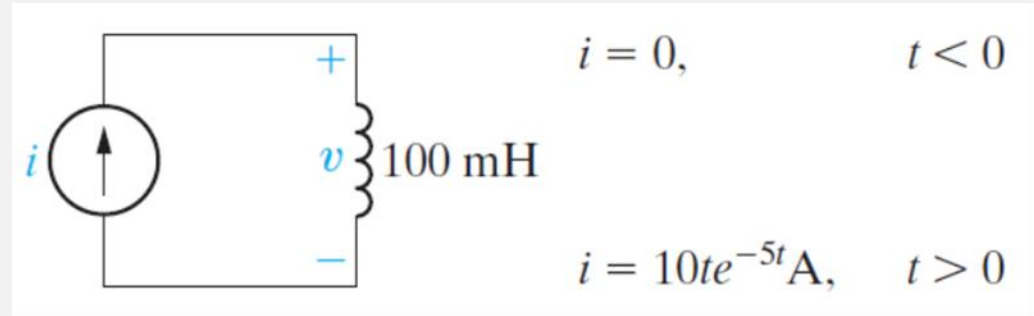
2. Όταν το ρεύμα είναι σταθερό (σε dc κυκλώματα) η τάση από επαγωγή είναι μηδενική.

Δηλαδή, ο επαγωγός στο dc ρεύμα συμπεριφέρεται σαν βραχυκύκλωμα.



Παράδειγμα 5.1

Η ανεξάρτητη πηγή ρεύματος στο κύκλωμα της εικ. (α) παράγει μηδενικό ρεύμα για $t < 0$ και έναν παλμό $10te^{-5t}$ A, για $t > 0$



(α)

- (α) Σχεδιάστε την κυματομορφή του ρεύματος.
(β) Ποια χρονική στιγμή το ρεύμα μεγιστοποιείται;

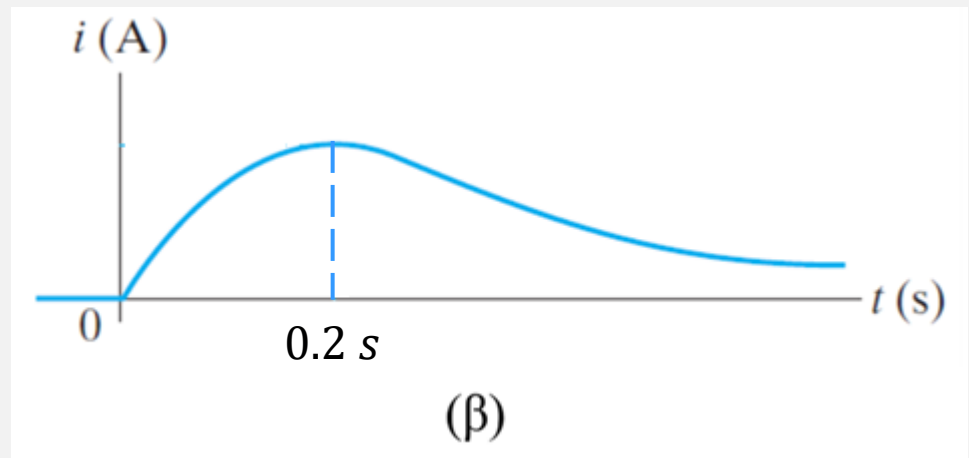
Λύση

- (α) Κυματομορφή ρεύματος $i(t)$, εικ. (β)
(β) Όταν $i = I_{max}$, $di/dt = 0$

$$\frac{d}{dt}(10te^{-5t}) = 0$$

$$10e^{-5t}(1 - 5t) = 0$$

$$t = 0.2 \text{ s}$$



(συνεχίζεται ...)

Παράδειγμα 5.1 (... συνέχεια)

(γ) Εκφράστε την τάση v στα άκρα του επαγωγού 100 mH σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

$$v = L \frac{di}{dt}$$

– Για $t < 0$, $v = 0$

– για $t > 0$, $v = (0.1) \frac{d}{dt}(10te^{-5t})$

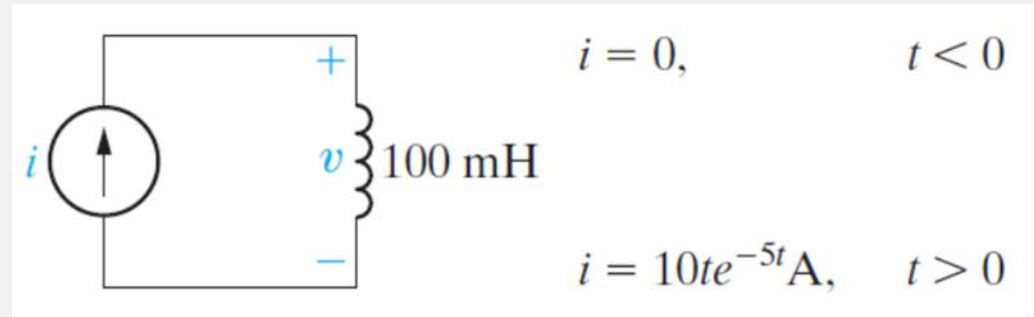
$$v = e^{-5t}(1 - 5t) \text{ V}$$

(δ) Σχεδιάστε την κυματομορφή της τάσης.

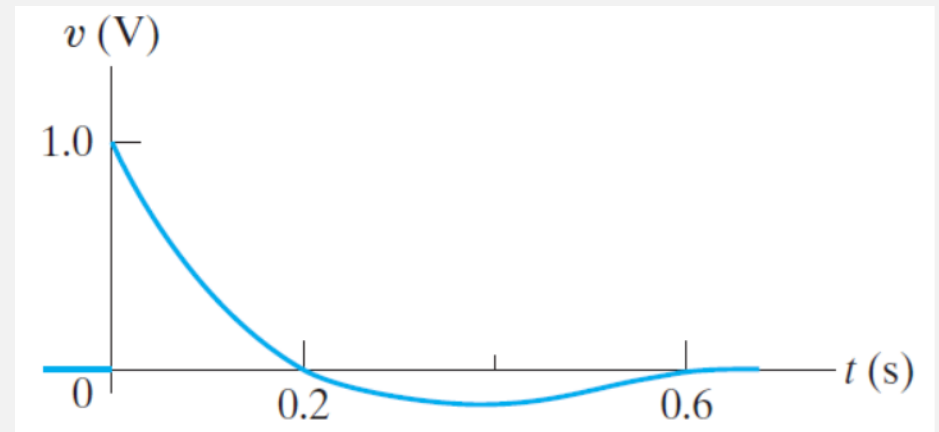
Λύση

Η κυματομορφή τάσης $v(t)$, *εικ. (γ)*

(συνεχίζεται ...)



(α)



(γ)

Παράδειγμα 5.1 (... συνέχεια)

(ε) Μεγιστοποιούνται ρεύμα και τάση την ίδια χρονική στιγμή;

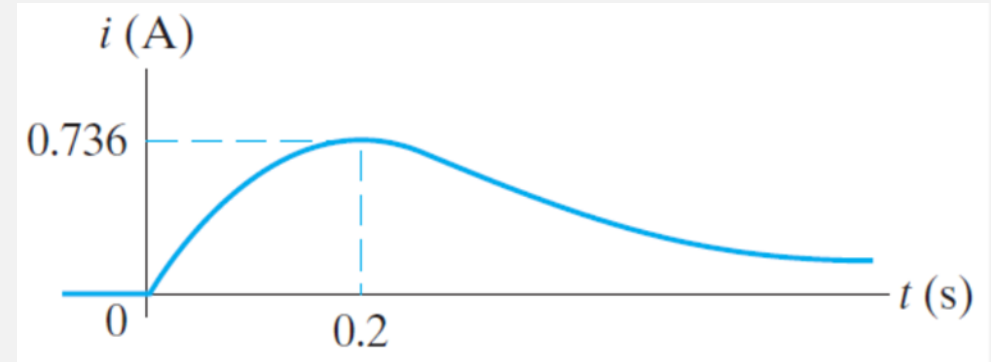
Λύση

Όχι, η τάση v είναι ανάλογη του $\frac{di}{dt}$, όχι του i

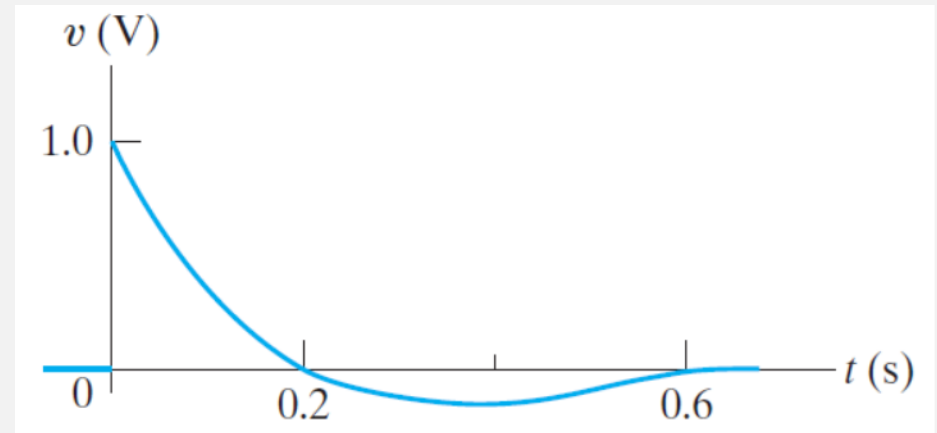
(στ) Ποια χρονική στιγμή αλλάζει πολικότητα η τάση;

Λύση

Εικ. (β), (γ): η τάση είναι ανάλογη της παραγώγου του ρεύματος, ^(γ)συνεπώς, μηδενίζεται και αλλάζει πολικότητα όταν το ρεύμα μεγιστοποιείται για $t = 0.2 \text{ s}$



(β)



(γ)

(συνεχίζεται ...)

Παράδειγμα 5.1 (... συνέχεια)

(ζ) Παρατηρείται καμία στιγμιαία μεταβολή της τάσης στα άκρα του επαγωγού; Αν ναι, πότε;

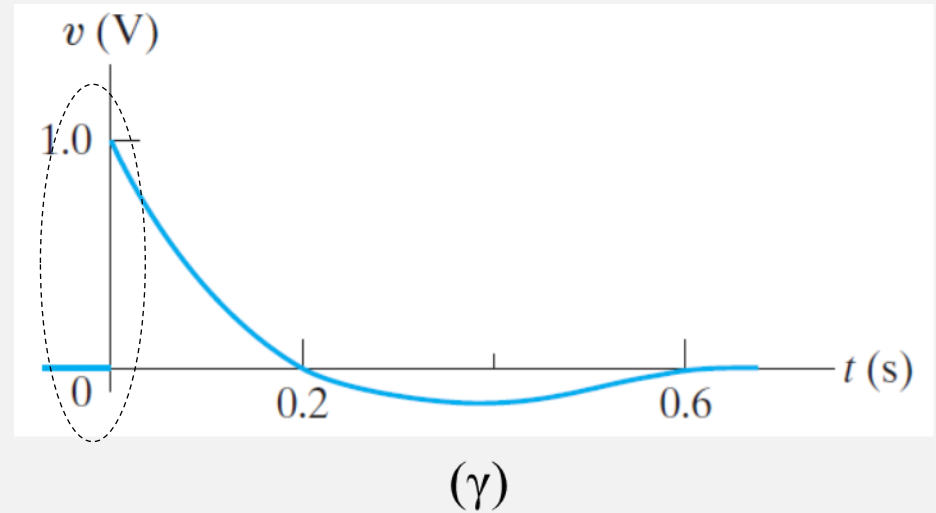
Λύση

(ζ) Ναι, για $t = 0$, *εικ. (γ)*

$$dv = (1.0 - 0) \text{ V} \neq 0, \text{ σε } dt = 0$$

Σημείωση

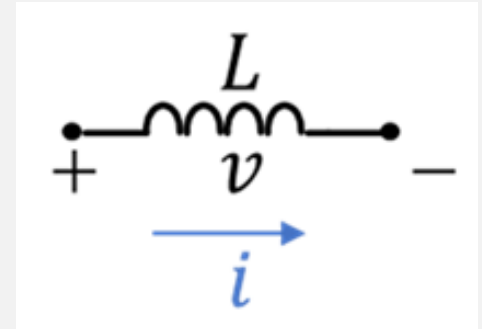
Σε ένα κύκλωμα επαγωγού η τάση μπορεί να αλλάξει στιγμιαία, το ρεύμα όχι.



Η εξίσωση $i - v$ στον επαγωγό

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$v dt = L di$$



Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_o και t που το ρεύμα έχει τιμές i_o και i , αντίστοιχα, έχουμε

$$L \int_{i_o}^i di = \int_{t_o}^t v dt$$

$$i - i_o = \frac{1}{L} \int_{t_o}^t v dt$$

$$i = i_o + \frac{1}{L} \int_{t_o}^t v dt$$

Παράδειγμα 5.3 Δίνεται η τάση στα άκρα του επαγωγού, βρείτε το ρεύμα

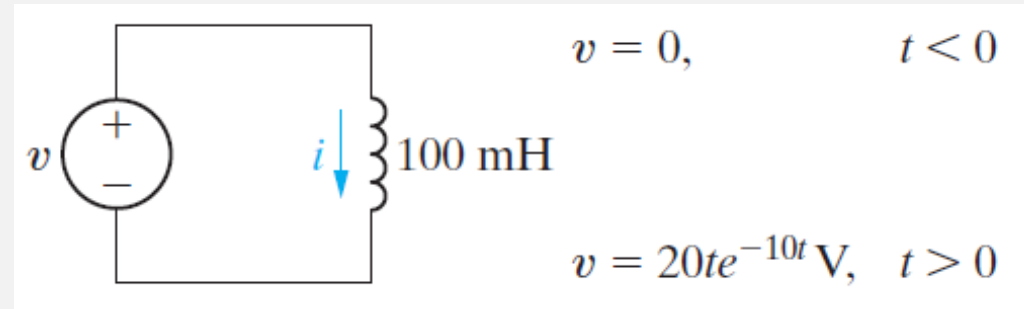
Ο παλμός τάσης που εφαρμόζεται στον επαγωγό 100 mH του κυκλώματος της εικ.

(α) είναι 0 για $t < 0$ και δίνεται από την έκφραση

$$v(t) = 20te^{-10t} \text{ V}$$

για $t > 0$. Υποθέστε $i = 0$ για $t \leq 0$.

(α) Σχεδιάστε την τάση σαν συνάρτηση του χρόνου.



(α)

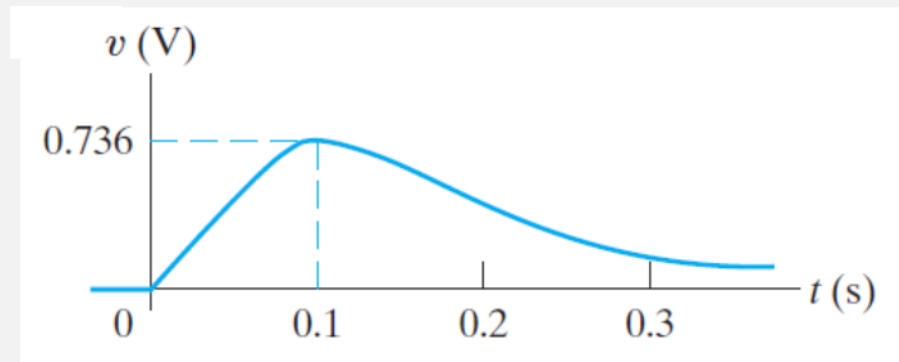
Λύση

(α) Κυματομορφή της τάσης $v(t)$, εικ.

(β)

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow 20e^{-10t}(1 - 10t) = 0$$

$$\Rightarrow t_{max} = 0.1 \text{ s}$$



(β)

(συνεχίζεται ...)

(β) Βρείτε και σχεδιάστε το ρεύμα στον επαγωγό σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

Το ρεύμα είναι

$$i = i_o + \frac{1}{L} \int_{t_o}^t v dt$$

Επειδή για $t = 0$, $i = 0$, παίρνουμε

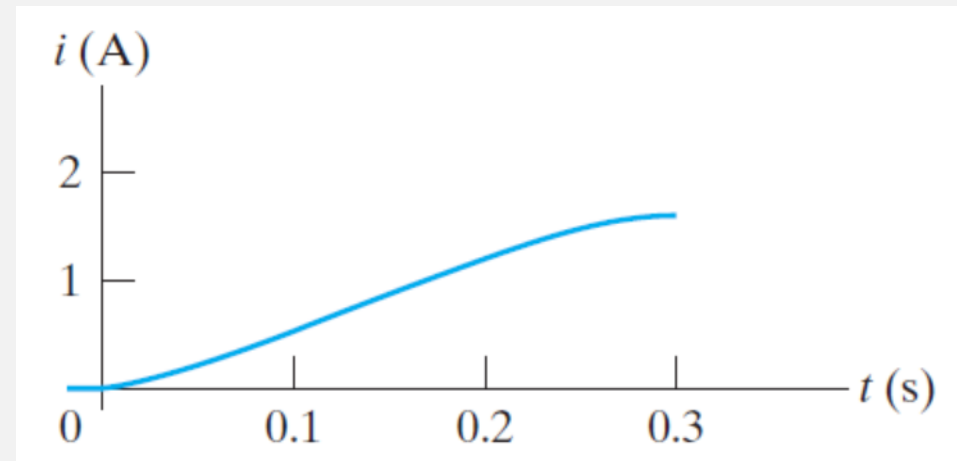
$$i = 0 + \frac{1}{0.1} \int_0^t 20te^{-10t} dt$$

$$i = 200 \left[\frac{-e^{-10t}}{100} (10t + 1) \right] \Big|_0^t *$$

$$i = 2(1 - 10te^{-10t} - e^{-10t}) \text{ A}$$

για $t > 0$

$$* \int te^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2} (\alpha t - 1)$$



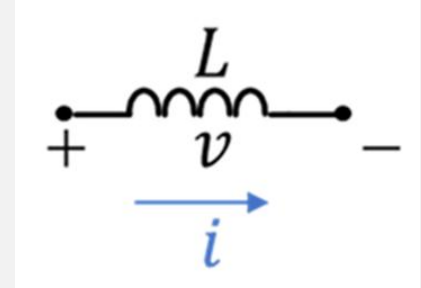
(γ)

Η κυματομορφή ρεύματος $i(t)$

Η ισχύς και η ενέργεια στον επαγωγό

Η στιγμιαία ισχύς στον επαγωγό

$$\left. \begin{array}{l} p = vi \\ v = L \frac{di}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow p = Li \frac{di}{dt}$$



Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} p = vi \\ i = i_o + \frac{1}{L} \int_{t_o}^t v dt \end{array} \right\} \Rightarrow p = v \left[i_o + \frac{1}{L} \int_{t_o}^t v dt \right]$$

Η ισχύς και η ενέργεια στον επαγωγό (συνέχεια)

Γενικά, η ισχύς είναι

$$p = \frac{dw}{dt}$$

Ειδικότερα, για έναν επαγωγό αυτεπάγωγης L

$$p = Li \frac{di}{dt}$$

Εξισώνοντας έχουμε

$$dw = Lidi$$

Ολοκληρώνοντας μεταξύ μιας μηδενικής αρχικής τιμής του ρεύματος στον επαγωγό ($i_o = 0$) και μιας τελικής τιμής i και αποδεχόμενοι το λογικό επιχείρημα ότι σε μηδενικό ρεύμα στον επαγωγό αντιστοιχεί μηδενική ενέργεια (σε μορφή μαγνητικού πεδίου) αποθηκευμένη σε αυτόν, παίρνουμε

$$\int_0^w dw = \int_0^i Lidi$$
$$w = \frac{1}{2} Li^2$$

Παράδειγμα 5.4

(α) Για το κύκλωμα του Παραδείγματος 5.1, *εικ. (α)*, σχεδιάστε τις κυματομορφές i , v , p και w ως προς το χρόνο.

Λύση

(α) Οι κυματομορφές $i(t)$

$$i(t) = 10te^{-5t} \text{ A}$$

και $v(t)$

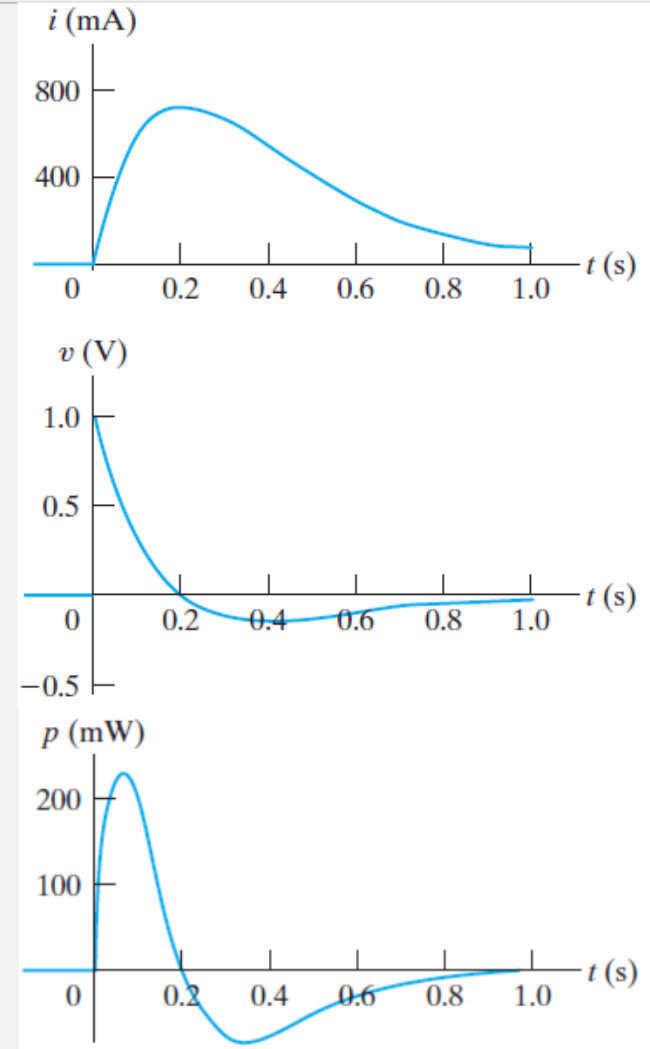
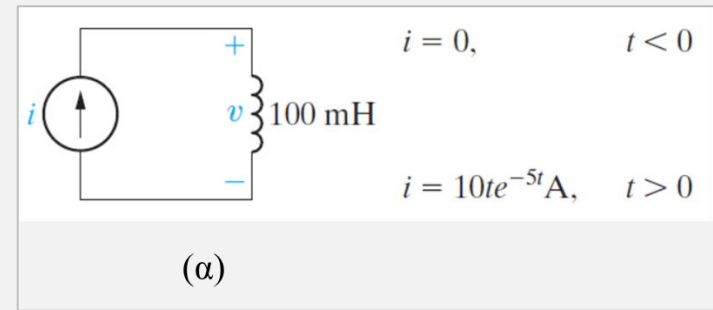
$$v(t) = e^{-5t}(1 - 5t) \text{ V}$$

όπως βρέθηκαν στη λύση του Παραδείγματος 5.1

Η ισχύς $p = vi = (10te^{-5t})[e^{-5t}(1 - 5t)]$

$$p = 10t(1 - 5t)e^{-10t} \text{ W}$$

(συνεχίζεται ...)



Λύση (...συνέχεια)

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη (σε μορφή μαγνητικού πεδίου – μαγνητική ενέργεια) στον επαγωγό

$$w = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L(10te^{-5t})^2$$

$$w = 50Lt^2e^{-10t} \text{ J}$$

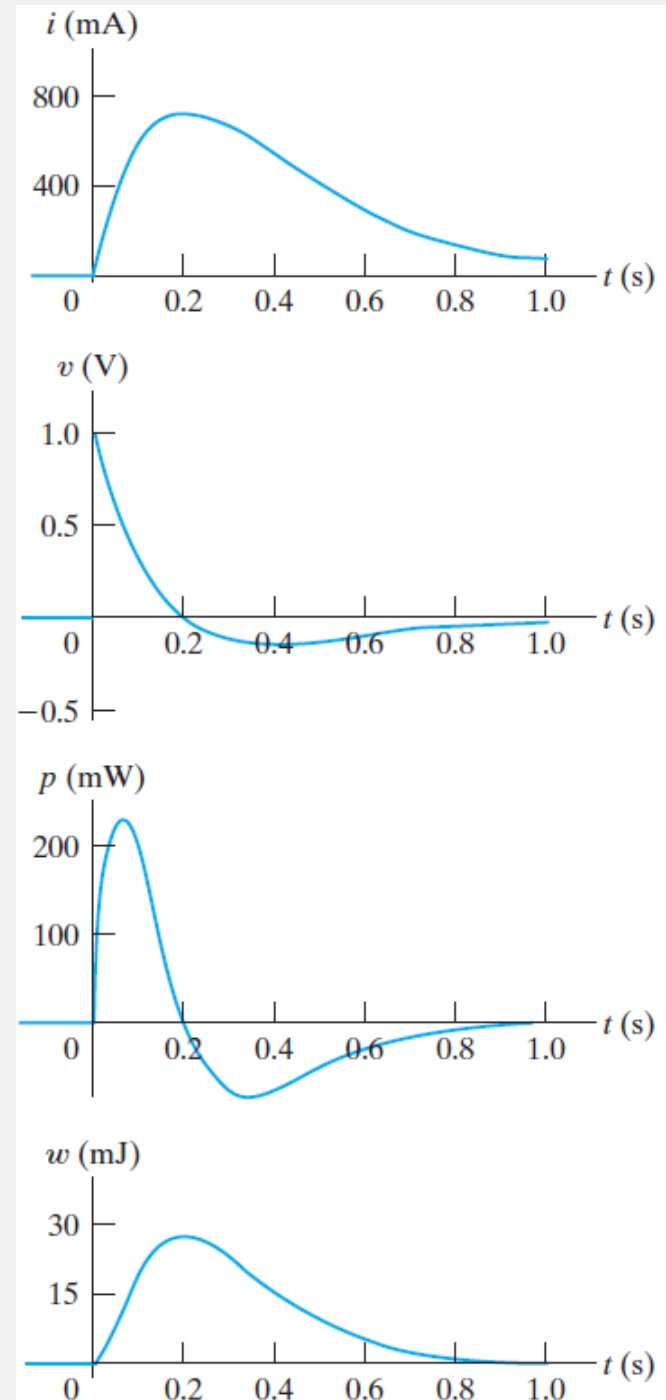
(β) Κατά τη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος αποθηκεύεται ενέργεια στον επαγωγό;

Ενέργεια αποθηκεύεται στον επαγωγό, όταν η καμπύλη της ενέργειάς του $w(t)$ είναι αύξουσα.

Αυτό συμβαίνει στο διάστημα 0 ως 0.2 s.

Σημείωση, αυτό αντιστοιχεί στο διάστημα που η ισχύς είναι θετική, $p > 0$.

(συνεχίζεται ...)



Λύση (...συνέχεια)

- (γ) Κατά τη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος αποβάλλεται ενέργεια από τον επαγωγό (δηλαδή, λειτουργεί σαν πηγή);

Ενέργεια αποβάλλεται από τον επαγωγό, όταν η καμπύλη της ενέργειάς του $w(t)$ είναι φθίνουσα.

Αυτό συμβαίνει για $t > 0.2 \text{ s}$

Σημειώστε, σε αυτό το διάστημα η ισχύς είναι αρνητική, $p < 0$.

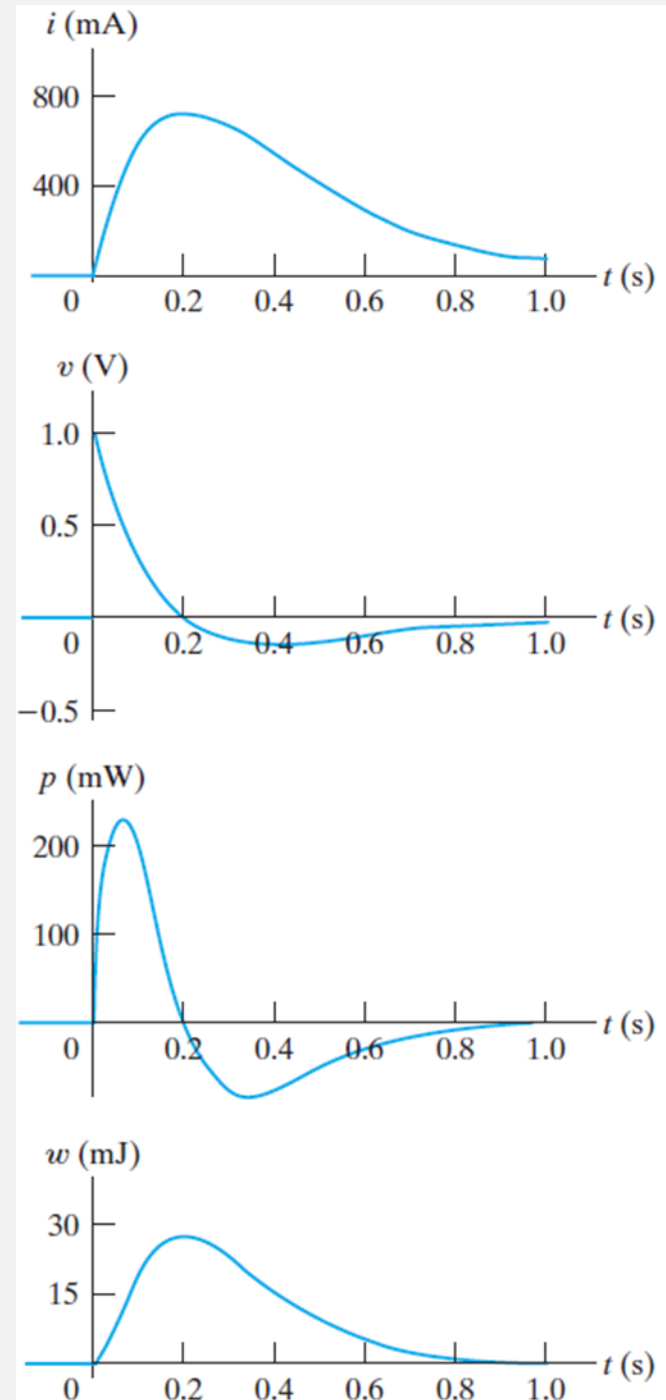
- (δ) Πόση είναι η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στον επαγωγό;

$$w = \frac{1}{2} Li^2$$

Η ενέργεια είναι μέγιστη όταν το ρεύμα είναι μέγιστο (συγκρίνετε καμπύλες $i - w$)

Επειδή $i_{\max} = 0.736 \text{ A}$, προκύπτει $w_{\max} = 27.07 \text{ mJ}$

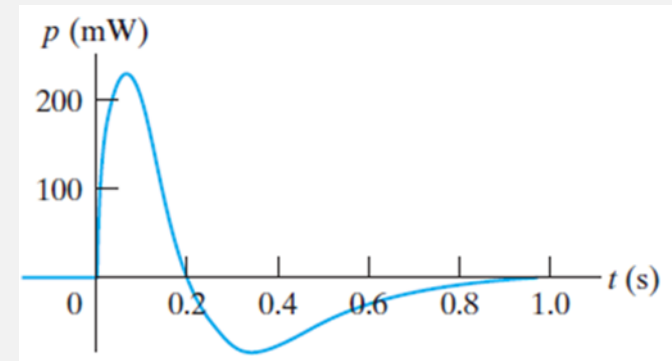
(συνεχίζεται ...)



Λύση (...συνέχεια)

(ε) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_0^{0.2} p dt$ και $\int_{0.2}^{\infty} p dt$

$$p = vi = 10te^{-10t} - 50t^2e^{-10t} \text{ W}$$



$$\begin{aligned} \int_0^{0.2} p dt &= \int_0^{0.2} (10te^{-10t} - 50t^2e^{-10t}) dt = 10 \int_0^{0.2} te^{-10t} dt - 50 \int_0^{0.2} t^2e^{-10t} dt \\ &= 0.2e^{-0.2} = \mathbf{27.07 \text{ mJ}} \end{aligned}$$

$$\int_{0.2}^{\infty} p dt = 10 \int_{0.2}^{\infty} te^{-10t} dt - 50 \int_{0.2}^{\infty} t^2e^{-10t} dt = -0.2e^{-0.2} = \mathbf{-27.07 \text{ mJ}}$$

Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της p ως προς t αντιπροσωπεύει την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί ή αποβληθεί από το σύστημα (τον επαγωγό)

Μεταξύ 0 και 0.2 s ενέργεια αποθηκεύεται στον επαγωγό που αποβάλλεται στη συνέχεια για $t > 0.2$ s κατά την απόσβεση του ρεύματός του

$$\int te^{at} dt = \frac{e^{at}}{\alpha^2} (\alpha t - 1)$$

$$\int t^2 e^{at} dt = e^{at} \left(\frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right)$$