ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι

Κεφάλαιο 5 Β΄

Επαγωγή και χωρητικότητα

- Ο πυκνωτής
- Σειριακοί και παράλληλοι συνδυασμοί επαγωγής και χωρητικότητας
- Αμοιβαία επαγωγή

Ο πυκνωτής
(capacitor)

- Συμβολισμός και αναφορά τάσης και ρεύματος
- Η εξίσωση $v - i$ στον πυκνωτή
- Ισχύς και ενέργεια πυκνωτή

Πυκνωτής

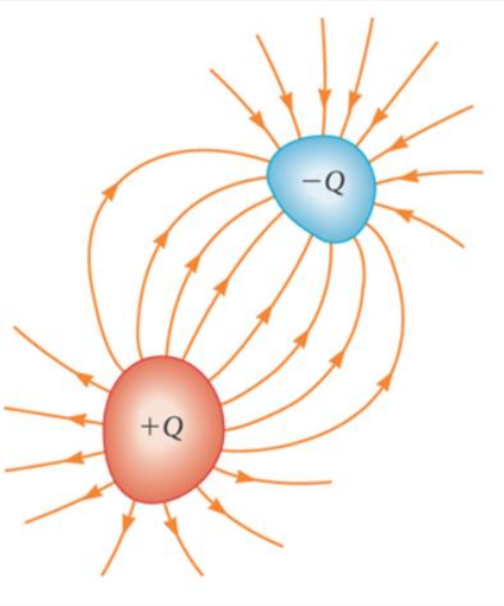
- Ένα **πυκνωτής** (**capacitor**), γενικά, αποτελείται από δύο αγωγούς, εικ. (α). Οι αγωγοί αυτοί ονομάζονται **πλάκες** ή **οπλισμοί**.

- Όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος, τότε οι οπλισμοί φέρουν ίσα και αντίθετα φορτία, $\pm Q$.

- Λόγω του φορτίου, μεταξύ των οπλισμών υπάρχει διαφορά δυναμικού (τάση), V.

- Η **χωρητικότητα** (**capacitance**) C ενός πυκνωτή ορίζεται ως ο λόγος της απόλυτης τιμής του φορτίου ενός από τους δύο αγωγούς προς την τάση μεταξύ των αγωγών

$$C = \frac{Q}{V}$$

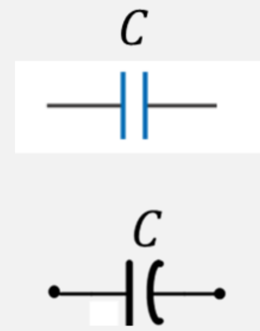


(α)

- Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή αποτελεί ένα μέτρο του φορτίου που μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής.

Σύμβολο και μονάδα χωρητικότητας πυκνωτή

- *Εικ. (α)*, σύμβολα πυκνωτή χωρητικότητας C
- Η μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας στο σύστημα SI είναι το farad (F).
- Το farad είναι μεγάλη μονάδα μέτρησης. Στην πράξη, οι συνήθεις συσκευές έχουν χωρητικότητα της τάξης των microfarad (μF) ως και picofarad (pF).
- Η χωρητικότητα είναι πάντα θετική ποσότητα.
- Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή είναι σταθερή.



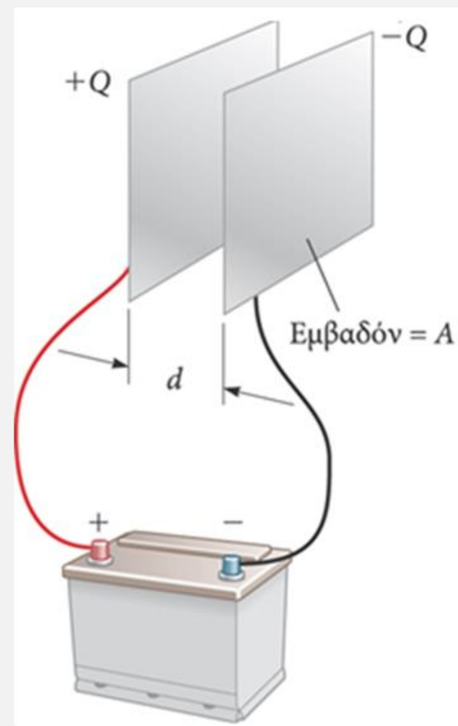
(α)

Παράδειγμα

Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή, *εικ. (β)*

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{d}$$

$$\varepsilon_o = 8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2 / N{\cdot}m^2}$$



(β)

Φόρτιση πυκνωτή

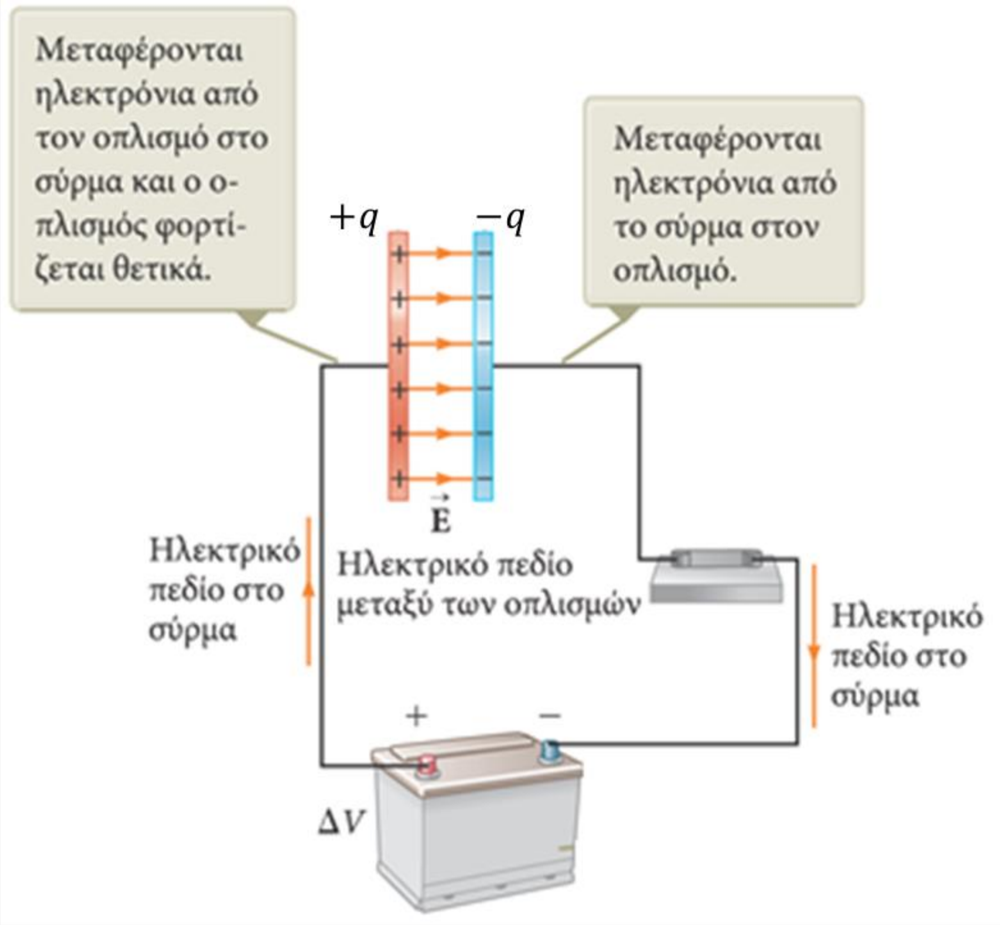
Εικ. (α): Αν ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος, μόλις γίνουν οι συνδέσεις, η μπαταρία θα δημιουργήσει ηλεκτρικό πεδίο στα σύρματα σύνδεσης.

Αυτό το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί μια δύναμη στα ηλεκτρόνια του σύρματος που βρίσκονται ακριβώς έξω από τους οπλισμούς.

Η δύναμη αναγκάζει τα ηλεκτρόνια να κινηθούν προς τον αρνητικό οπλισμό.

Η μεταφορά συνεχίζεται μέχρι να φτάσει το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας.

Τότε ο οπλισμός, το σύρμα, και ο πόλος έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό.



(α)

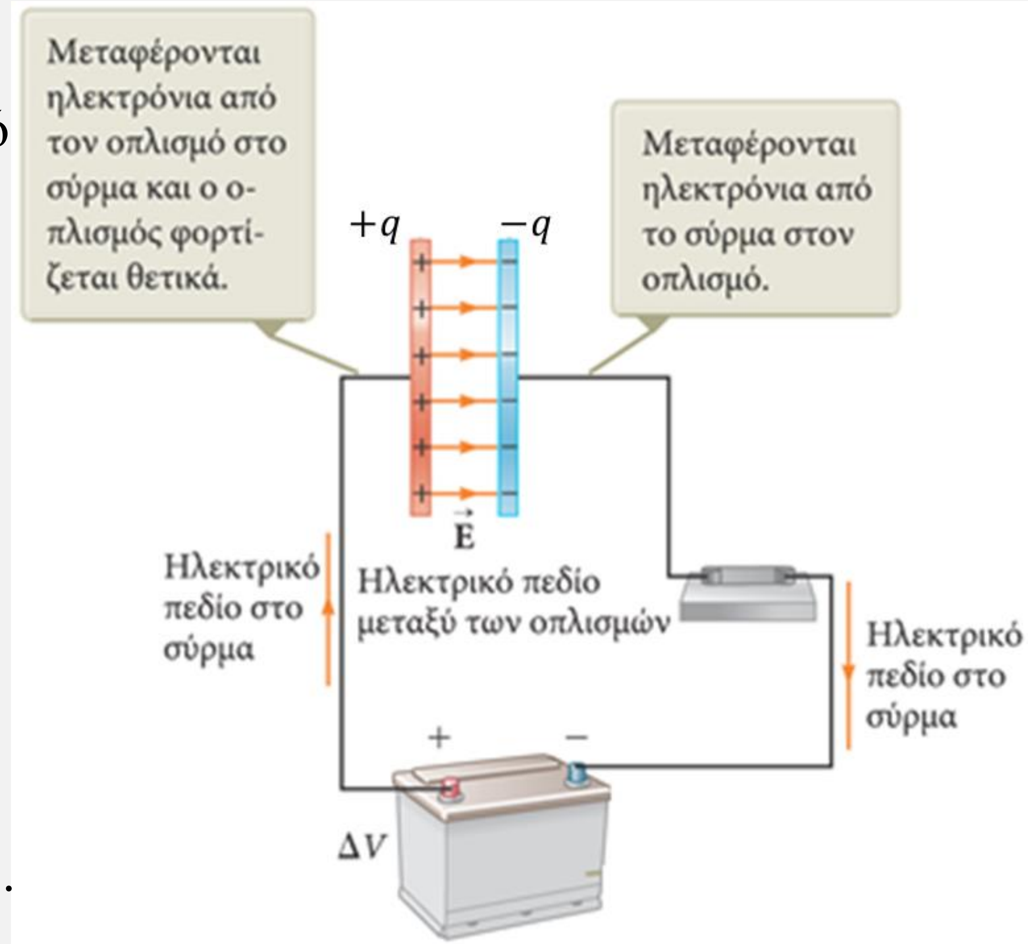
Φόρτιση πυκνωτή *(… συνέχεια)*

Παρόμοια και ταυτόχρονη διεργασία συμβαίνει και στον άλλο οπλισμό: μεταφέρονται ηλεκτρόνια από τον οπλισμό στο σύρμα, με αποτέλεσμα ο οπλισμός να φορτιστεί θετικά.

Σε αυτή την τελική κατάσταση, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή (τάση του πυκνωτή) ΔV είναι η ίδια με των πόλων της μπαταρίας.

Ο πυκνωτής μπορεί να περιγραφεί ως μια διάταξη στην οποία αποθηκεύεται τόσο φορτίο q όσο και ενέργεια σε μορφή ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ (ηλεκτρική ενέργεια).

Η τάση του πυκνωτή ισούται με την ενέργειά του ανά μονάδα φορτίου, $\Delta V = w/q$



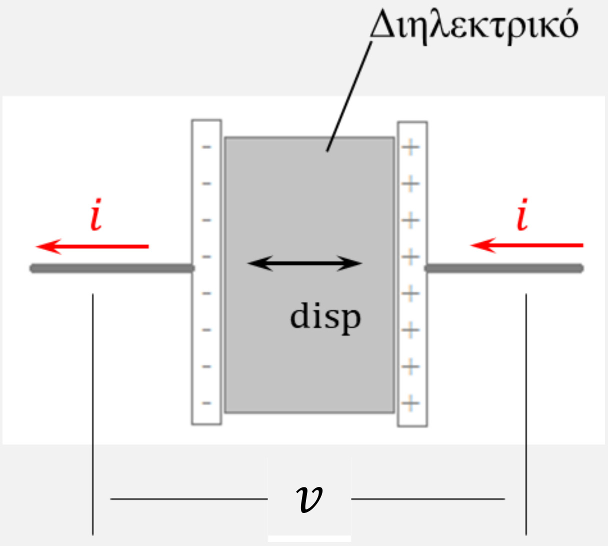
(α)

Αγωγιμότητα πυκνωτή στο εναλλασσόμενο πεδίο – Ρεύμα μετατόπισης

- Το σύμβολο του πυκνωτή υποδηλώνει απουσία σύνδεσης μεταξύ των δύο ηλεκτρικών οπλισμών οι οποίοι χωρίζονται από **διηλεκτρικό** υλικό (μονωτή).

- Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να περάσει ηλεκτρικό φορτίο, δηλαδή, ρεύμα αγωγιμότητας i μέσω του πυκνωτή.

- Αν και η εφαρμογή τάσης στους οπλισμούς του πυκνωτή δεν μπορεί να προκαλέσει κίνηση φορτίου από το ένα άκρο στο άλλο μέσω του διηλεκτρικού, δηλαδή ρεύμα αγωγιμότητας i, μπορεί εντούτοις να προκαλέσει μετατόπιση φορτίου (πόλωση).



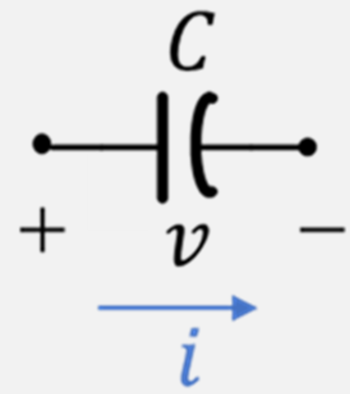
- Καθώς η τάση μεταβάλλεται με το χρόνο, η μετατόπιση του φορτίου (πόλωση) επίσης μεταβάλλεται με το χρόνο, προκαλώντας το λεγόμενο ρεύμα μετατόπισης (displacement current)

- Στους οπλισμούς, το ρεύμα μετατόπισης ταυτίζεται με το ρεύμα αγωγιμότητας, $i_{\text{disp}} = i$.

- Αποτέλεσμα; Σε χρονικά μεταβαλλόμενη τάση, ο πυκνωτής κλείνει κύκλωμα μέσω του ρεύματος μετατόπισης και επιτρέπει τη διέλευση χρονικά μεταβαλλόμενου ρεύματος i.

Η εξίσωση $i - v$ στον πυκνωτή

Εικ. (α): Πολικότητα της τάσης και φορά του ρεύματος σε έναν πυκνωτή



(α)

Η εξίσωση $v - i$ στον πυκνωτή

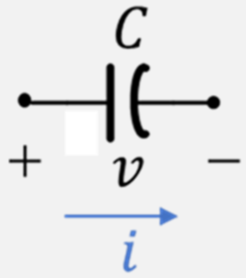
$$\left.\begin{array}{r} i = \dfrac{dq}{dt} \\ q = Cv \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{i = C\frac{dv}{dt}}$$

- v σε volt
- i σε ampere
- t σε second
- C σε farad: $1\mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$

Συνέπειες της εξίσωσης $i - v$ στον πυκνωτή

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Το ρεύμα σε έναν πυκνωτή είναι ανάλογο **της μεταβολής του τάσης στα άκρα του**.



Σημαντικές παρατηρήσεις

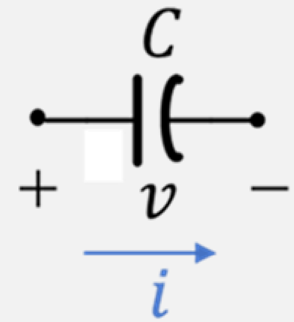
1. Η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή δεν μπορεί να αλλάξει στιγμιαία. Δηλαδή, δεν μπορώ να έχω πεπερασμένη μεταβολή της τάσης ($dv \neq 0$) σε μηδενικό χρόνο ($dt = 0$).

   Μια τέτοια στιγμιαία μεταβολή θα απαιτούσε άπειρο ρεύμα ($i \propto \frac{dv}{dt} \to \infty$);;;

2. Όταν η τάση είναι σταθερή (σε dc κυκλώματα) το ρεύμα μέσω του πυκνωτή είναι μηδενικό.

   Δηλαδή, ο πυκνωτής στο dc ρεύμα συμπεριφέρεται σαν ανοικτό κύκλωμα.

Η εξίσωση $v - i$ στον πυκνωτή



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$idt = Cdv$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_o και t που η τάση έχει τιμές v_o και v, αντίστοιχα, έχουμε

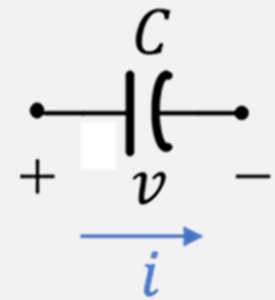
$$C\int_{v_o}^{v} dv = \int_{t_o}^{t} idt$$

$$v - v_o = \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} vdt$$

$$\boldsymbol{v = v_o + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} idt}$$

Η ισχύς στον πυκνωτή

Η στιγμιαία ισχύς στον πυκνωτή



$$\left.\begin{aligned} p &= vi \\ i &= C\frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \boldsymbol{p = Cv\frac{dv}{dt}}$$

Επίσης

$$\left.\begin{aligned} p &= vi \\ v &= v_o + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} idt \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \boldsymbol{p = i\left[v_o + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} idt\right]}$$

Η ενέργεια στον πυκνωτή

Ισχύς σε πυκνωτή χωρητικότητας C

$$p = Cv\frac{dv}{dt}$$

Η ισχύς που παράγεται ή καταναλώνεται στον πυκνωτή είναι ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας που είναι αποθηκευμένη σε αυτόν κάθε χρονική στιγμή

$$p = \frac{dw}{dt}$$

Εξισώνοντας έχουμε

$$dw = Cvdv$$

Ολοκληρώνοντας μεταξύ μιας μηδενικής αρχικής τιμής τάσης ($v_o = 0$) και μιας τελικής τιμής v και θεωρώντας ότι σε μηδενική τάση (φόρτιση) ο πυκνωτής έχει μηδενική ενέργεια (σε μορφή ηλεκτρικού πεδίου) αποθηκευμένη σε αυτόν, παίρνουμε

$$\int_0^w dw = C\int_0^i vdv$$

$$\boldsymbol{w = \frac{1}{2}Cv^2}$$

Παράδειγμα 5.5 Υπολογισμός ρεύματος, τάσης, ισχύος και ενέργειας σε πυκνωτή

Ο παλμός τάσης

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 4t \ \text{V}, & 0 \le t \le 1 \\ 4e^{-(t-1)} \ \text{V}, & 1 \le t \le \infty \end{cases}$$

εφαρμόζεται στα άκρα ενός πυκνωτή 0.5 μF.

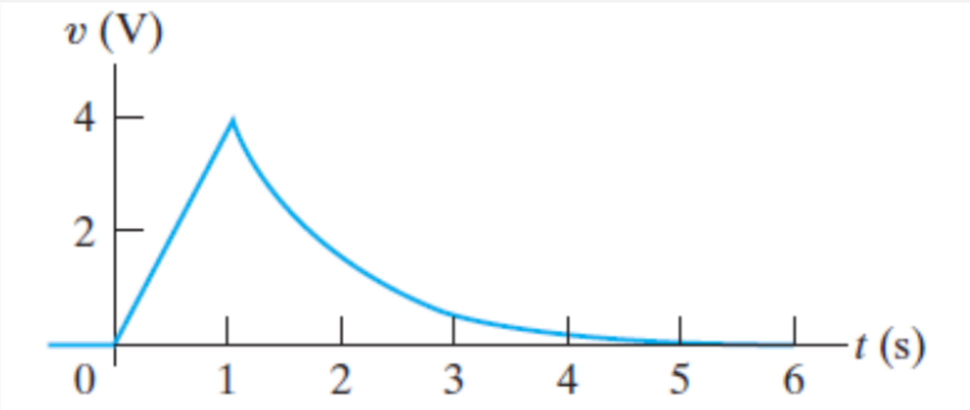
Βρείτε και σχεδιάστε τις εκφράσεις για το ρεύμα, την ισχύ και την ενέργεια του πυκνωτή

Λύση

Ο παλμός τάσης στον πυκνωτή

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 4t \ \text{V}, & 0 \le t \le 1 \\ 4e^{-(t-1)} \ \text{V}, & 1 \le t \le \infty \end{cases}$$

Το γράφημα του παλμού τάσης



(*συνεχίζεται ...*)

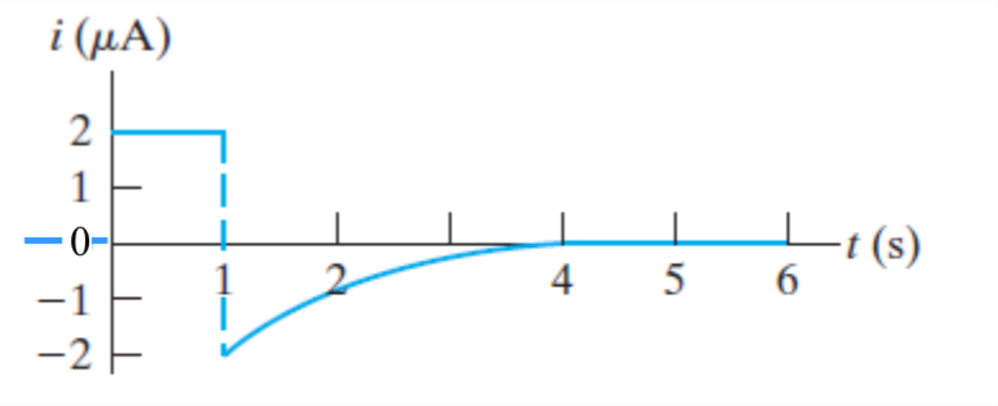
Λύση (*… συνέχεια*)

Από τον παλμό τάσης $v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 4t \ \text{V}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 4e^{-(t-1)} \ \text{V}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$

και την εξίσωση για το ρεύμα $i = C\dfrac{dv}{dt}$, βρίσκουμε

$$i(t) = \begin{cases} (0.5 \times 10^{-6})(0) = 0, & t \leq 0, \\ (0.5 \times 10^{-6})(4) = 2 \ \mu\text{A}, & 0 \leq t \leq 1 \\ (0.5 \times 10^{-6})\left(-4e^{-(t-1)}\right) = -2e^{-(t-1)} \ \mu\text{A}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Το γράφημα του ρεύματος στον πυκνωτή



(*συνεχίζεται …*)

Λύση *(… συνέχεια)*

Από τις εκφράσεις για την τάση και το ρεύμα

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 4t \ \text{V}, & 0 \le t \le 1 \\ 4e^{-(t-1)} \ \text{V}, & 1 \le t \le \infty \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 2 \ \mu\text{A}, & 0 \le t \le 1 \\ -2e^{-(t-1)} \ \mu\text{A}, & 1 \le t \le \infty \end{cases}$$

η εξίσωση για την ισχύ $p = vi$ δίνει

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ (4t)(2) = 8 \ \mu\text{W}, & 0 \le t \le 1 \\ \left(4e^{-(t-1)}\right)\left(-2e^{-(t-1)}\right) = -8e^{-2(t-1)} \ \mu\text{W}, & 1 \le t \le \infty \end{cases}$$

(συνεχίζεται …)

Λύση (*… συνέχεια*)

Η έκφραση για την ενέργεια προκύπτει από την εξίσωση $w = \frac{1}{2}Cv^2$

και την έκφραση για την τάση

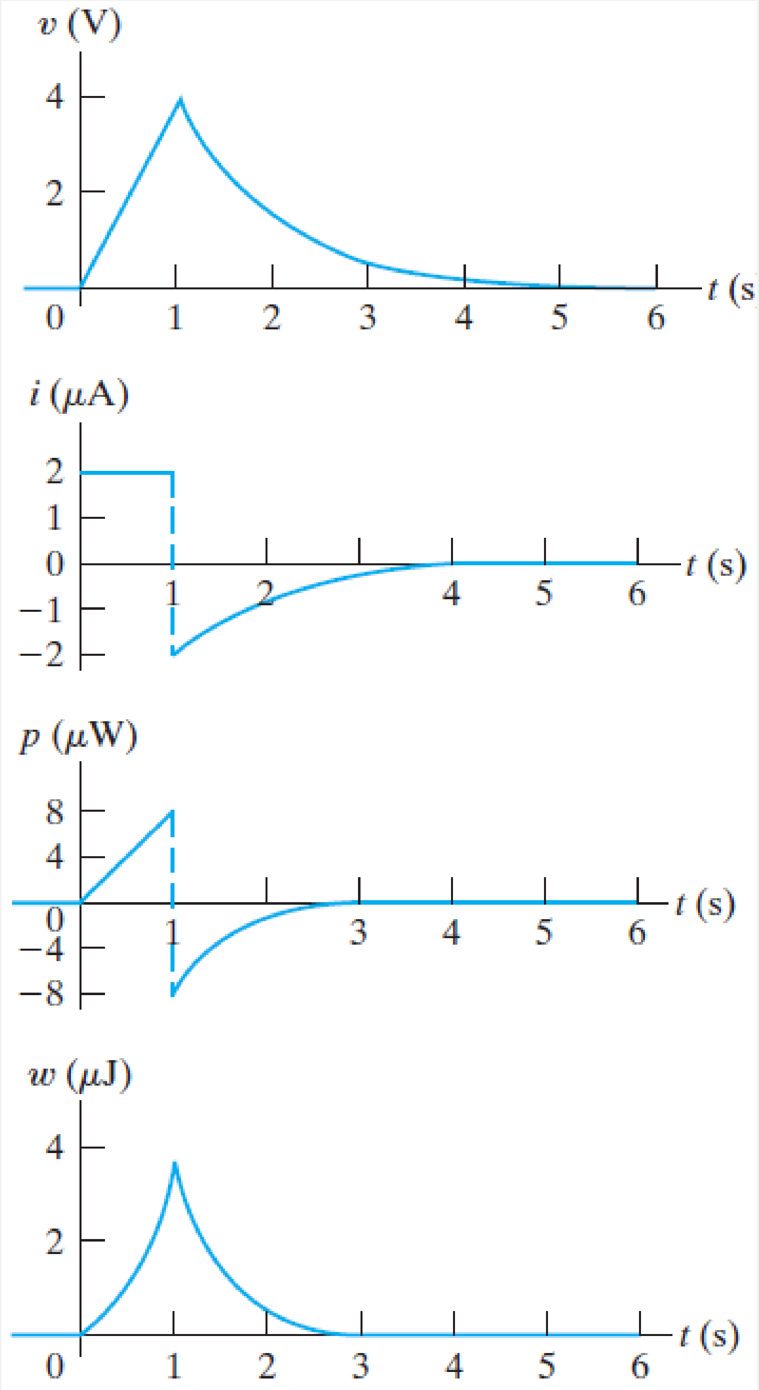
$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 4t \ \text{V}, & 0 \le t \le 1 \\ 4e^{-(t-1)} \ \text{V}, & 1 \le t \le \infty \end{cases}$$

έχουμε

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \frac{1}{2}(0.5)16t^2 = 4t^2 \ \mu\text{J}, & 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2}(0.5)16e^{-2(t-1)} = 4e^{-2(t-1)} \ \mu\text{J}, & 1 \le t \le \infty \end{cases}$$

(*συνεχίζεται …*)

Λύση *(… συνέχεια)*



(συνεχίζεται …)

(β) Κατά τη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος αποθηκεύεται ενέργεια στον πυκνωτή;

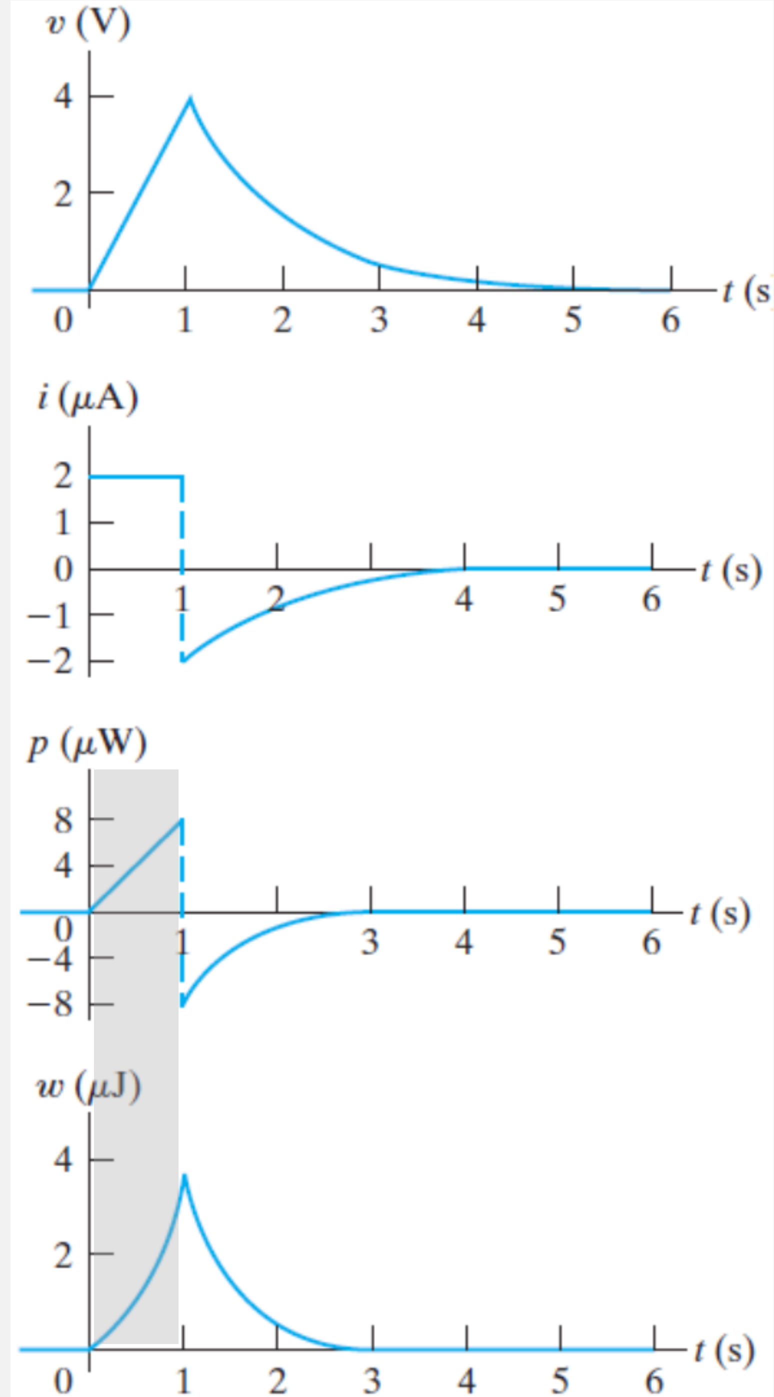
Λύση

(β) Ενέργεια αποθηκεύεται στον πυκνωτή, όταν η ισχύς είναι θετική, $p > 0$

ή

η καμπύλη της ενέργειάς του $w(t)$ είναι αύξουσα.

Αυτό συμβαίνει στο διάστημα 0 ως 1 s.



(συνεχίζεται ...)

(γ) Κατά τη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος ο πυκνωτής αποβάλλει ενέργεια;

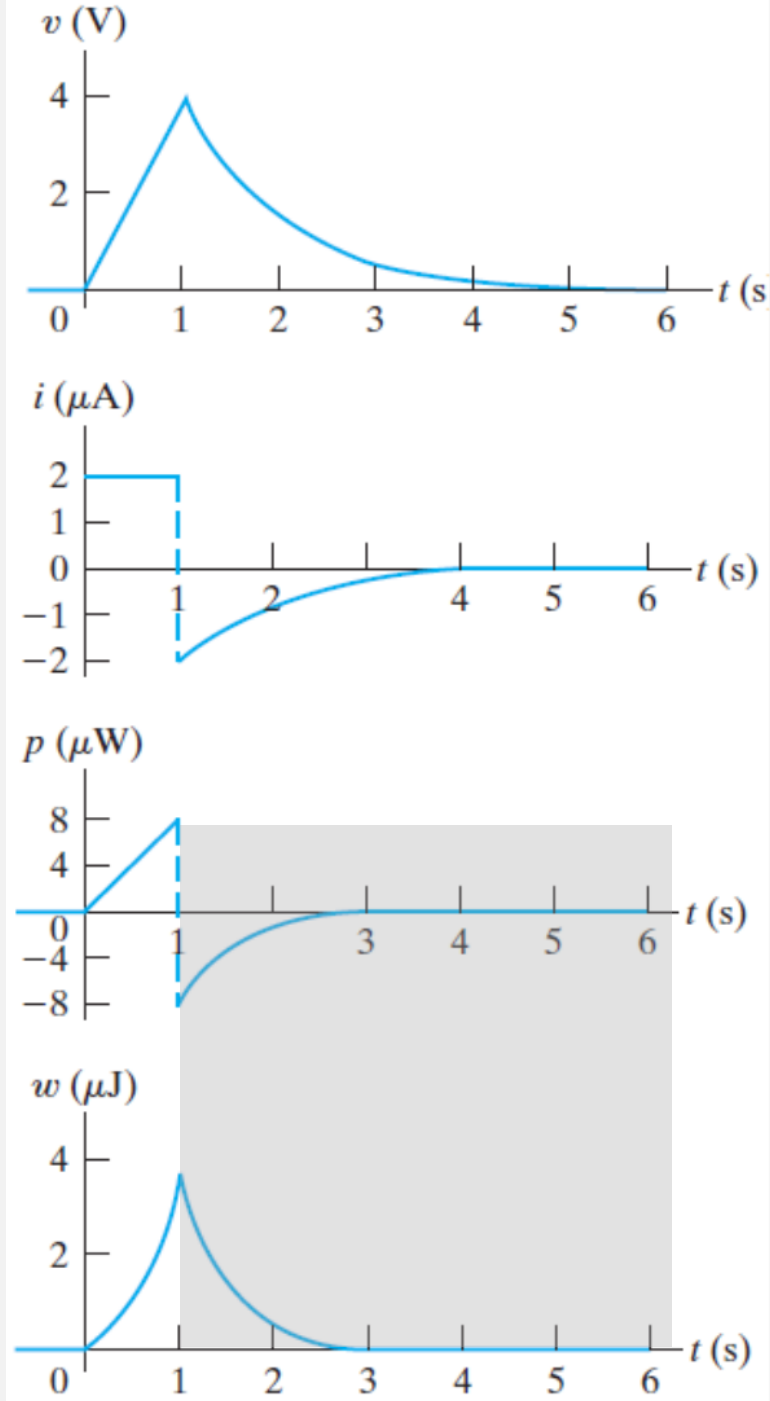
Λύση

(γ) Ενέργεια αποβάλλεται από τον πυκνωτή, όταν η ισχύς είναι αρνητική, $p < 0$

ή

η καμπύλη της ενέργειάς του $w(t)$ είναι φθίνουσα.

Αυτό συμβαίνει για $t \geq 1$ s.



(συνεχίζεται ...)

(δ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 pdt$ και $\int_1^\infty pdt$

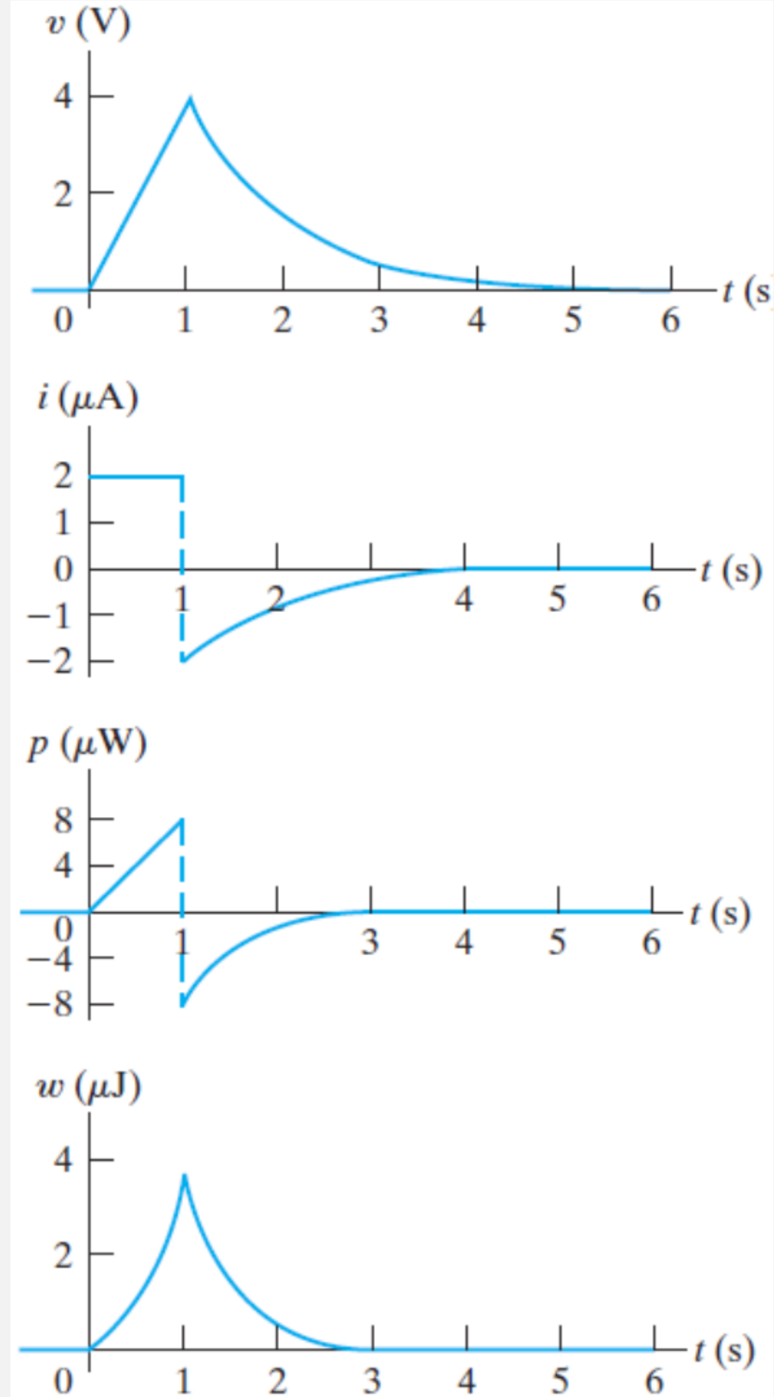
Λύση

(δ) Το ολοκληρώματα $\int_0^1 pdt$ εκφράζει τη συνολική ενέργεια φόρτισης του πυκνωτή

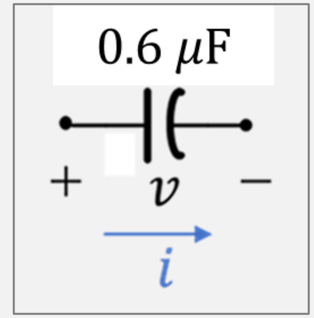
$$\int_0^1 pdt = \int_0^1 8t\,dt = 4t^2\Big|_0^1 = 4\ \mu\text{J}$$

Προφανώς, η τιμή του ολοκληρώματος $\int_1^\infty pdt$ αντιστοιχεί στη συνολική ενέργεια που αποβάλλει ο πυκνωτής που σε μέτρο είναι ίση με την ενέργεια που πήρε κατά τη φόρτιση

$$\int_1^\infty pdt = -\int_0^1 pdt = -4\ \mu\text{J}$$



Παράδειγμα 5.6



Το ρεύμα στον πυκνωτή 0.6 μF της εικόνας είναι

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3\cos 50000t \ \ \text{A}, & t \geq 0 \end{cases}$$

βρείτε

(α) $v(t)$,

(β) τη μέγιστη ισχύ που αποδίδεται στον πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή,

(γ) τη μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή.

Λύση

(α) Από την εξίσωση για την τάση στον πυκνωτή $v = v_o + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i dt$, θεωρώντας τον αρχικά αφόρτιστο ($v_o = 0$ για $t < 0$), έχουμε

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0 + \dfrac{1}{0.6 \times 10^{-6}} \displaystyle\int_0^t 3\cos 50000t \, dt \ \ \text{V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

(συνεχίζεται ...)

Λύση (*… συνέχεια*)

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (5 \times 10^6) \int_0^t \cos 50000t \, dt^{\,*} \ \text{V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$^{*} \int \cos \alpha t \, dt = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 100 \sin 50000t \Big|_0^t \ \text{V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

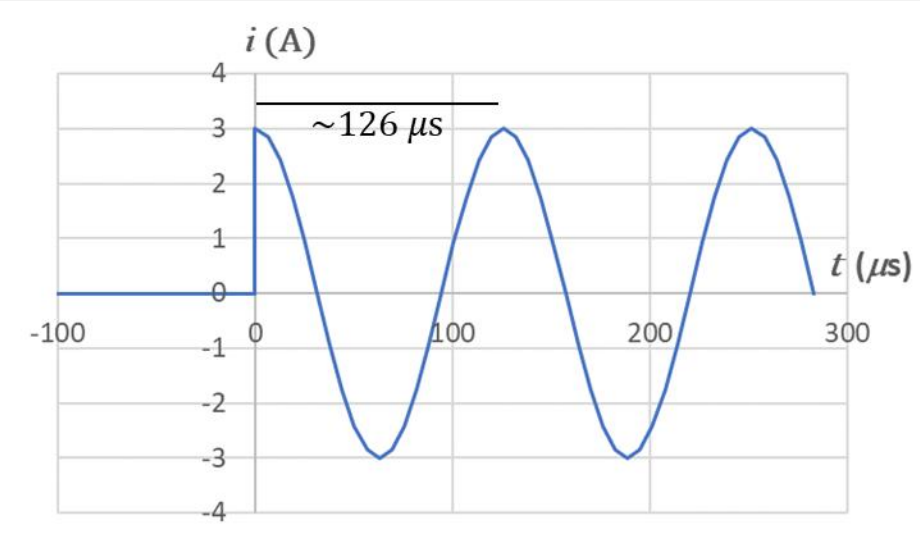
$$\boldsymbol{v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 100\, sin\, 50000t \ V, & t \geq 0 \end{cases}}$$

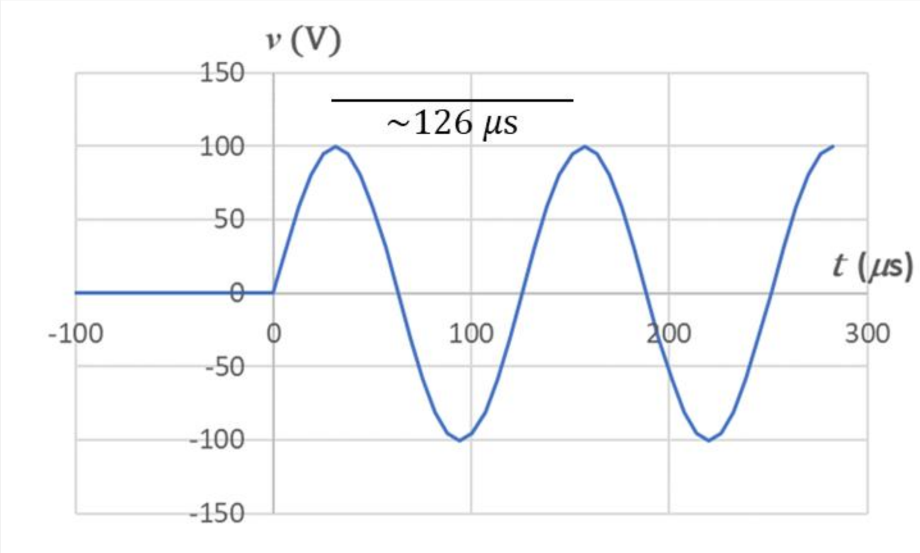
(συνεχίζεται …)

Λύση (*… συνέχεια*)

Οι κυματομορφές ρεύματος και τάσης είναι

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3\cos 50000t \quad \text{A}, & t \geq 0 \end{cases} \qquad v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 100\, sin\, 50000t \;\; V, & t \geq 0 \end{cases}$$





(συνεχίζεται …)

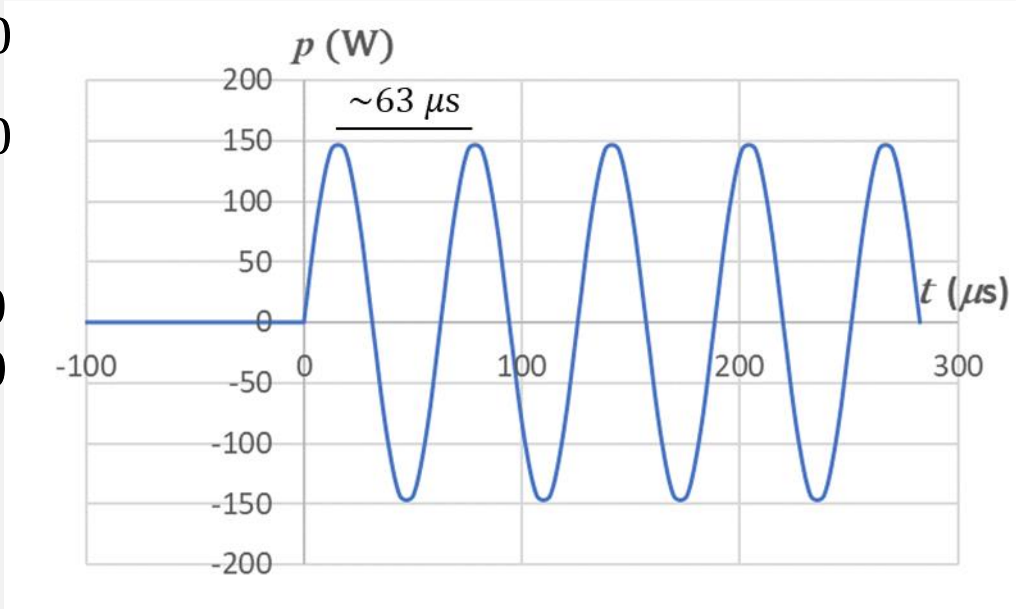
Λύση (*… συνέχεια*)

(β) Από τις εκφράσεις για το ρεύμα και την τάση βρίσκουμε την ισχύ $p = vi$

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (3\,cos\,50000t)(100\,sin\,50000t)\ \text{ W}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{300}{2} sin\,100000t\ \text{ W}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 150\,sin\,100000t\ \text{ W}, & t \geq 0 \end{cases}$$



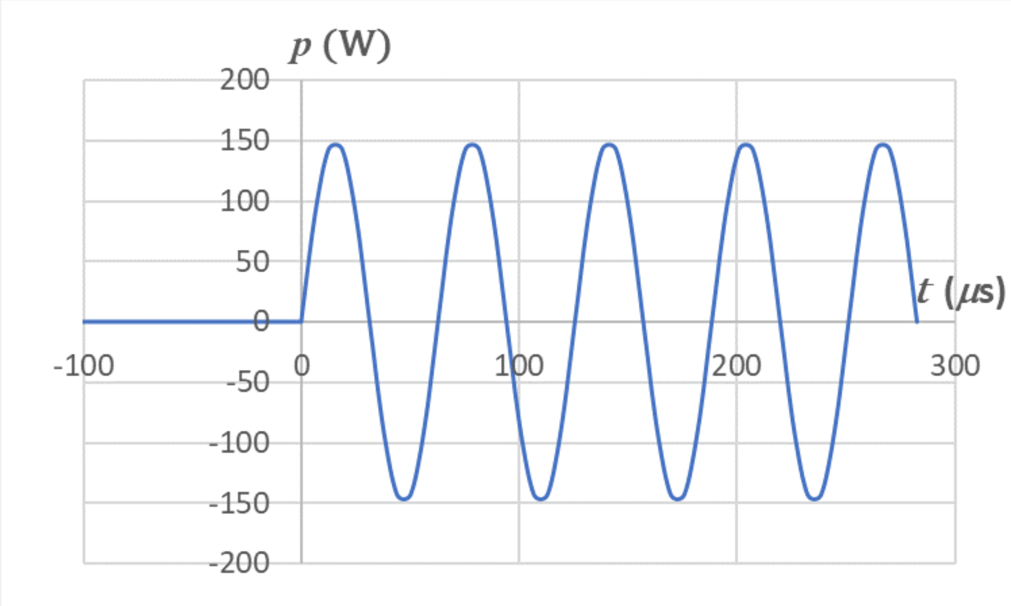
Η μέγιστη τιμή της ισχύος στον πυκνωτή είναι $\boldsymbol{P_{max} = 150\ \mathrm{W}}$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

(συνεχίζεται …)

Λύση *(… συνέχεια)*

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 150\, sin\, 100000t \quad \text{W}, & t \geq 0 \end{cases}$$



Ερωτήσεις

1. Ποιες χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστη η ισχύς που αποδίδεται στον πυκνωτή;
2. Τι συμβαίνει τις χρονικές στιγμές που η κυματομορφή ισχύος έχει τις ελάχιστες τιμές της;

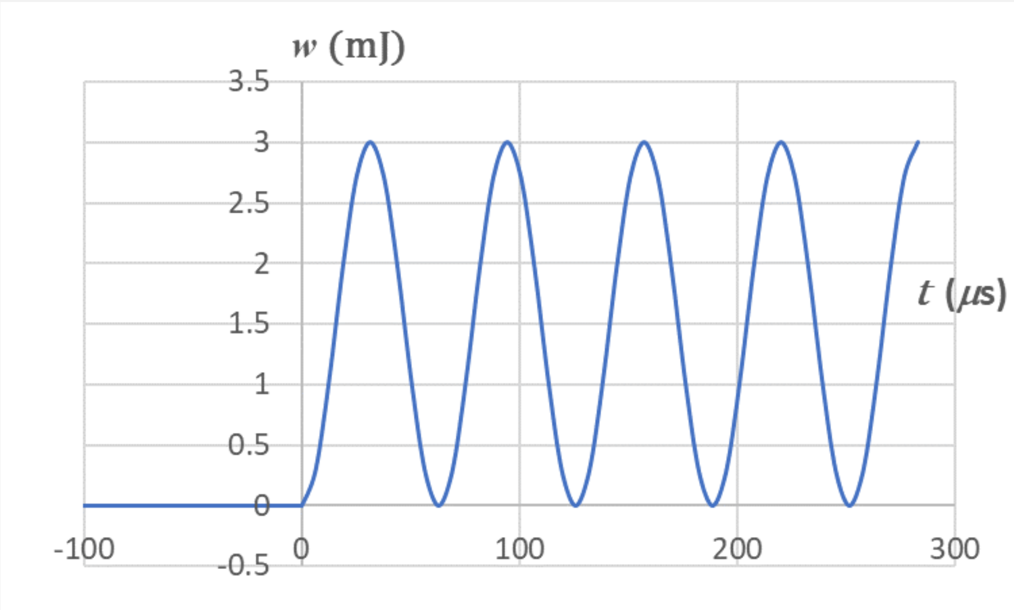
(συνεχίζεται …)

Λύση (… *συνέχεια*)

(γ) Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή είναι $w = \frac{1}{2}Cv^2$

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}(0.6 \times 10^{-6})(100\, sin\, 50000t)^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

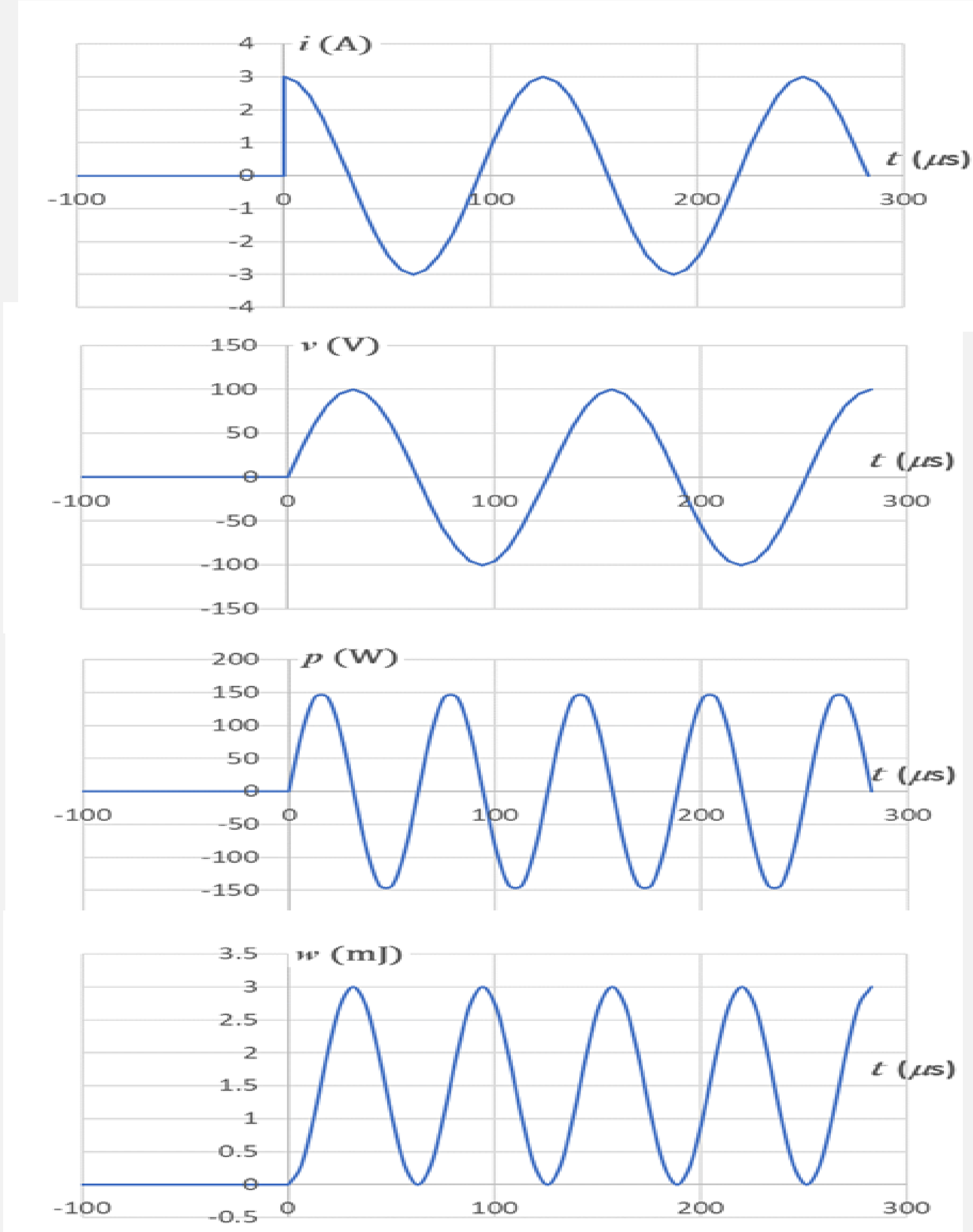
$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3\sin^2 50000t \;\; \text{mJ}, & t \geq 0 \end{cases}$$



Η μέγιστη τιμή που παίρνει η αποθηκευμένη ενέργεια

είναι $\boldsymbol{W_{\max} = 3\ \text{mJ}}$

(*συνεχίζεται …)*



i (A)
t (μs)
-100
0
100
200
300
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
v (V)
150
100
50
0
-50
-100
-150
p (W)
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
w (mJ)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5

Έλεγξε την απάντηση στο Παράδειγμα 5.6 με το κύκλωμα

Example 5_6

στο MulisimLive group

ECE-UOWM MK18

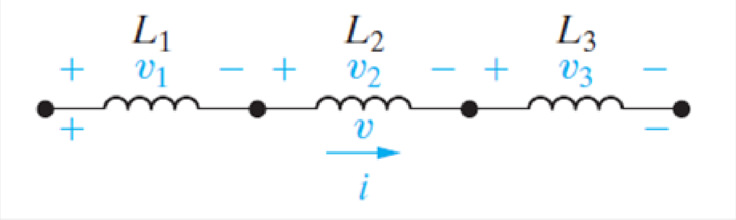
Σειριακοί - παράλληλοι συνδυασμοί επαγωγής και χωρητικότητας

(Series-parallel combinations of inductance and capacitance)

- Επαγωγείς σε σειρά: Ισοδύναμη επαγωγή
- Επαγωγείς παράλληλα: Ισοδύναμη επαγωγή και ισοδύναμο αρχικό ρεύμα
- Πυκνωτές σε σειρά: Ισοδύναμη χωρητικότητα και ισοδύναμη αρχική τάση
- Πυκνωτές παράλληλα: Ισοδύναμη χωρητικότητα

Επαγωγείς σε σειρά

Εικ. (α), σειριακός συνδυασμός επαγωγέων



(α)

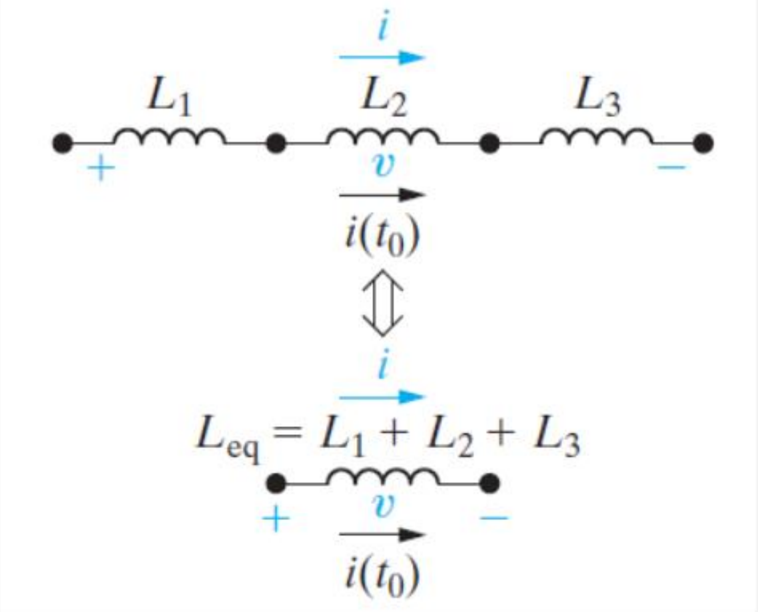
Εικ. (β), ισοδύναμο κύκλωμα επαγωγέων σε σειρά

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3$$

- Ρεύμα κοινό, $i_1 = i_2 = i_3 = i$

- Τάση από το νόμο τάσεων Kirchhoff,

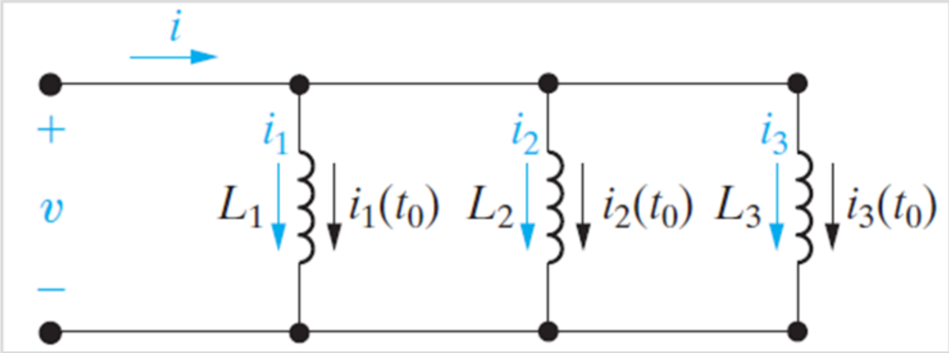
$$v = v_1 + v_2 + v_3$$



(β)

Παράλληλοι επαγωγείς

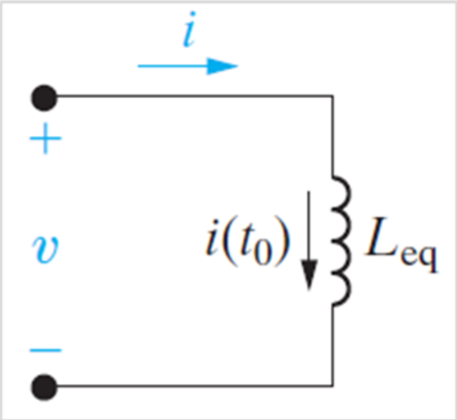
Εικ. (α), παράλληλος συνδυασμός επαγωγέων



(α)

Εικ. (β), ισοδύναμο κύκλωμα επαγωγέων παράλληλα

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$



(β)

- Αρχικό ρεύμα ισοδύναμου επαγωγέα από το νόμο ρευμάτων Kirchhoff,

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$

Πυκνωτές σε σειρά

Εικ. (α), πυκνωτές σε σειρά

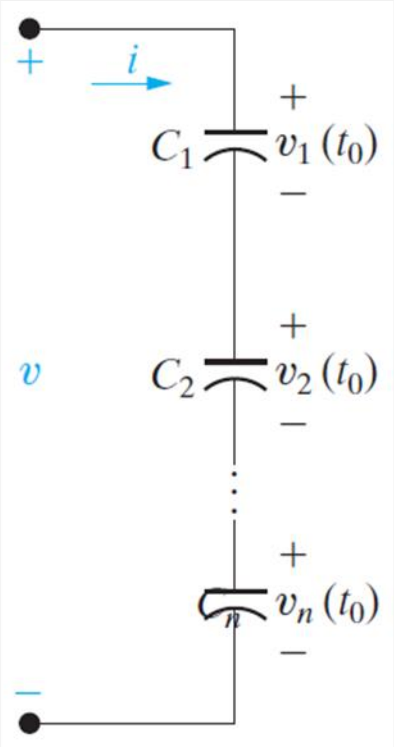
Εικ. (β), ισοδύναμη χωρητικότητα σειριακού συνδυασμού πυκνωτών

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

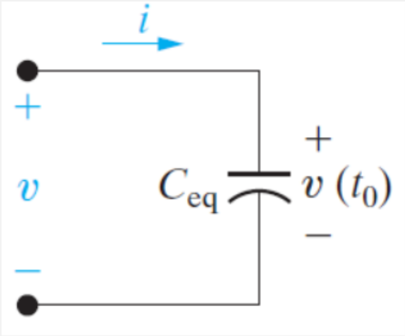
- Αρχική τάση ισοδύναμης χωρητικότητας από το νόμο ρευμάτων Kirchhoff,

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0)$$

(α)

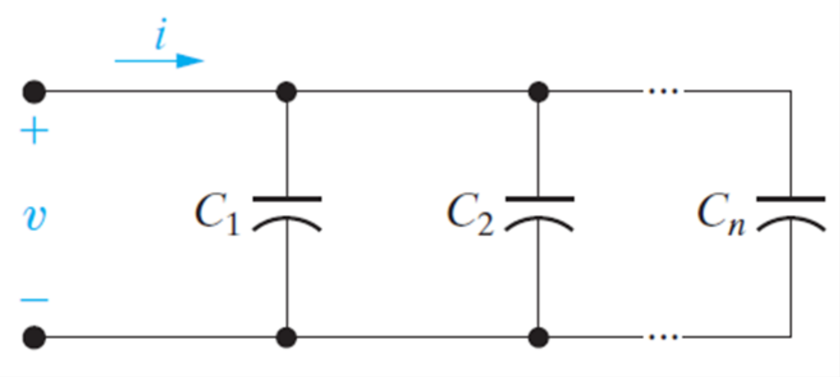


(β)



Παράλληλοι πυκνωτές

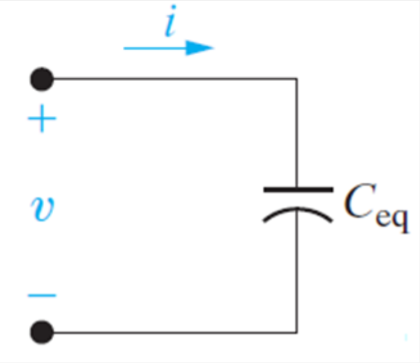
Εικ. (α), παράλληλος συνδυασμός πυκνωτών



(α)

Εικ. (β), ισοδύναμο κύκλωμα παράλληλων πυκνωτών

$$\boldsymbol{C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$



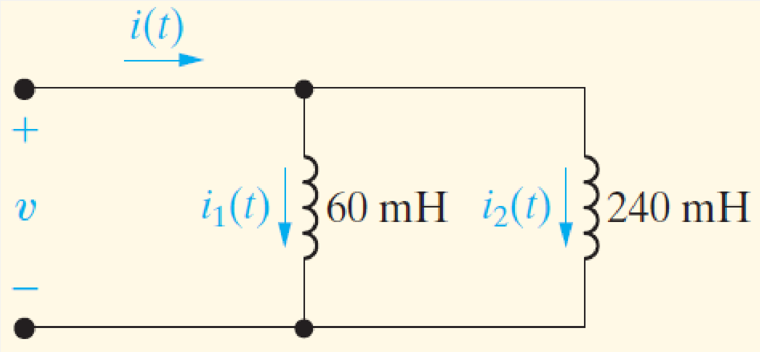
(β)

- Αρχικό ρεύμα ισοδύναμου επαγωγέα από το νόμο ρευμάτων Kirchhoff,

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$

Παράδειγμα 5.7

Οι αρχικές τιμές των i_1 και i_2 στο κύκλωμα της εικόνας είναι +3 A και −5 A, αντίστοιχα. Η τάση v στα άκρα των παράλληλων επαγωγών για $t \geq 0$ είναι $-30e^{-5t}$ mV.



(α) Αν οι παράλληλοι επαγωγείς αντικατασταθούν από έναν απλό επαγωγό, ποια είναι η τιμή του;

(β) Ποιο είναι το αρχικό ρεύμα και η φορά αναφοράς του στον ισοδύναμο επαγωγό;

Απάντηση

(α)

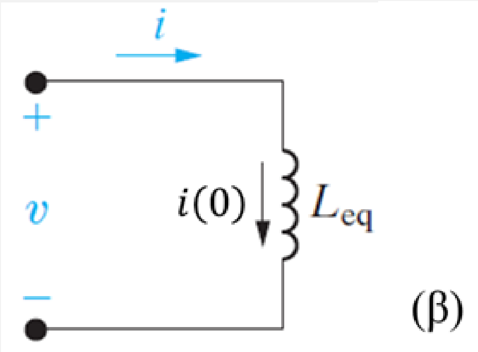
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{60\ \text{mH}} + \frac{1}{240\ \text{mH}}$$

$$L_{eq} = \mathbf{48\ mH}$$

(β)

$$i(0) = i_1(0) + i_2(0)$$
$$= (+3\ \text{A}) + (-5\ \text{A}) = \mathbf{-2\ A}$$

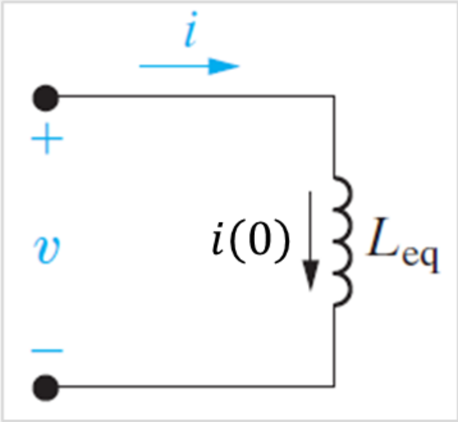
με βάση την φορά αναφοράς της *εικ. (β)*.



(*συνεχίζεται …*)

Παράδειγμα 5.7 *(… συνέχεια)*

(γ) Χρησιμοποιήστε τον ισοδύναμο επαγωγό για να βρείτε το $i(t)$.



(β)

Λύση

Το $i(t)$ στον ισοδύναμο επαγωγό, *εικ. (β)*, είναι

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L_{eq}} \int_0^t v dt$$

$$i(t) = -2 + \frac{1}{48 \text{ mH}} \int_0^t (-30e^{-5t} \text{ mV}) dt$$

$$i(t) = -2 - \frac{30}{48 \text{ mH}} \left(-\frac{1}{5} e^{-5t} \text{mV} \right) \Big|_0^t$$

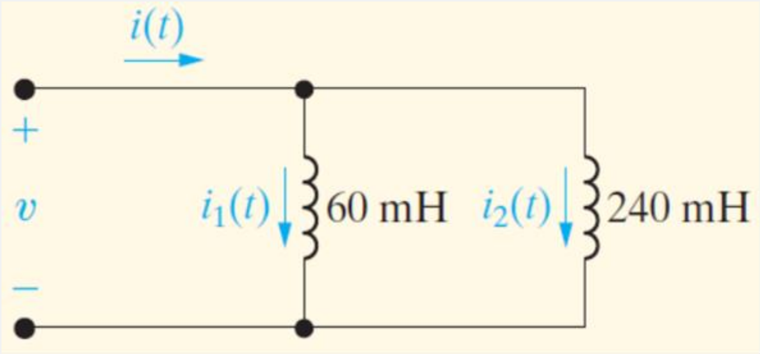
$$i(t) = -2 + 0.125(e^{-5t} - 1) \text{ A}$$

$$\boldsymbol{i(t) = -2.125 + 0.125 e^{-5t} \ \text{A}}$$

(συνεχίζεται …)

Παράδειγμα 5.7 *(… συνέχεια)*

(δ) Βρείτε τα $i_1(t)$ και $i_2(t)$. Επιβεβαιώστε ότι οι λύσεις για τα $i_1(t)$, $i_2(t)$ και $i(t)$ ικανοποιούν το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff.



(α)

Λύση

$$i_1(t) = i_1(0) + \frac{1}{60\ \mathrm{mH}}\int_0^t v dt$$

$$i_1(t) = 3\ \mathrm{A} + \frac{1}{60\ \mathrm{mH}}\int_0^t (-30e^{-5t}\ \mathrm{mV}) dt$$

$$i_1(t) = \mathbf{2.9 + 0.1}\boldsymbol{e^{-5t}}\ \boldsymbol{A}$$

και

$$i_2(t) = i_2(0) + \frac{1}{240\ \mathrm{mH}}\int_0^t v dt = \mathbf{-5.025 + 0.025}\boldsymbol{e^{-5t}}\ \boldsymbol{A}$$

Προσθέτοντας, έχουμε $i_1(t) + i_2(t) = -2.125 + 0.125e^{-5t} = i(t)$

δηλαδή, οι λύσεις ικανοποιούν το νόμο των ρευμάτων Kirchhoff.

Αμοιβαία επαγωγή

(Mutual inductance)

- Η αυτεπαγωγή (self-inductance) είναι η παράμετρος που σχετίζει την τάση που αναπτύσσεται (επάγεται) σε ένα κύκλωμα λόγω του χρονικά μεταβαλλόμενου ρεύματος στο ίδιο κύκλωμα.

- Τι συμβαίνει όταν το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα ενός κυκλώματος διέρχεται από ένα γειτονικό κύκλωμα; Δηλαδή, όταν τα δύο κυκλώματα είναι μαγνητικά συζευγμένα;

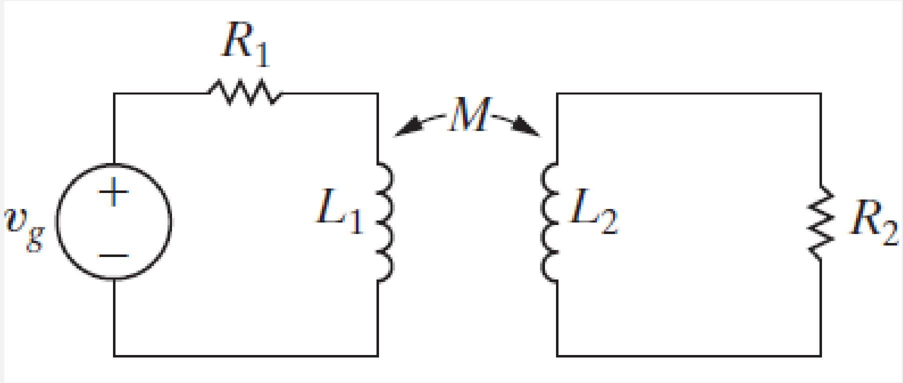
- Σε αυτήν την περίπτωση, η μεταβολή του ρεύματος στο ένα κύκλωμα θα επάγει μια τάση στο άλλο.

- Αμοιβαία επαγωγή είναι η παράμετρος που σχετίζει την τάση στο ένα κύκλωμα με το χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα στο άλλο.

Μαγνητικά συζευγμένα κυκλώματα

Η *εικ. (α)* αντιπροσωπεύει δυο **μαγνητικά συζευγμένα** πηνία (**magnetically coupled** coils)

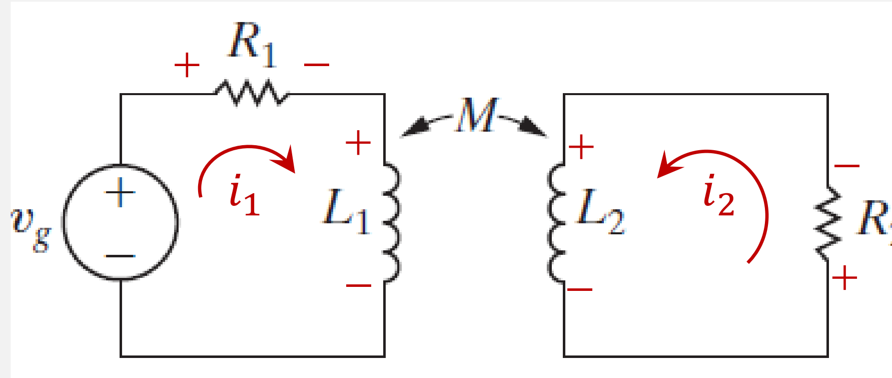
- L_1 L_2 εκφράζουν τις αυτεπαγωγές των δύο πηνίων
- M εκφράζει την αμοιβαία επαγωγή μεταξύ των δύο πηνίων
- Το διπλό βέλος δείχνει το ζεύγος των πηνίων με αυτή την αμοιβαία επαγωγή.



(α)

Αμοιβαία επαγωγή

Ο ευκολότερος τρόπος να αναλύσουμε κυκλώματα που περιλαμβάνουν αμοιβαία επαγωγή είναι με τα ρεύματα βρόχων.



(β)

- Πρώτα, επιλέγουμε τη φορά αναφοράς κάθε ρεύματος, αυθαίρετα, *εικ. (β)*.

- Αθροίζουμε τις πτώσεις τάσης γύρω από κάθε διαδρομή (βρόχο).

- Σε κάθε αντίσταση, η πτώση τάσης iR

- Λόγω αυτεπαγωγής και αμοιβαίας επαγωγής θα επάγονται δύο τάσεις σε κάθε πηνίο. Παράδειγμα, στο πηνίο L_1 :

  1. η τάση αυτεπαγωγής $L_1(di_1/dt)$ και

  2. η τάση λόγω αμοιβαίας επαγωγής $M(di_2/dt)$

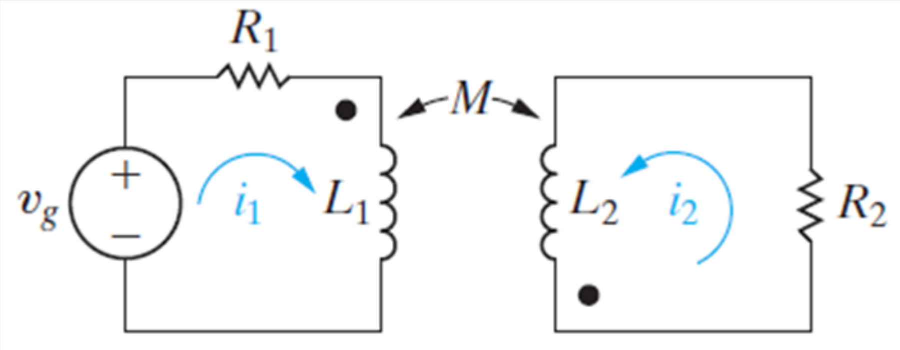
Ποια είναι, όμως, η πολικότητα της τάσης από αμοιβαία επαγωγή;

Πολικότητα τάσης αμοιβαίας επαγωγή

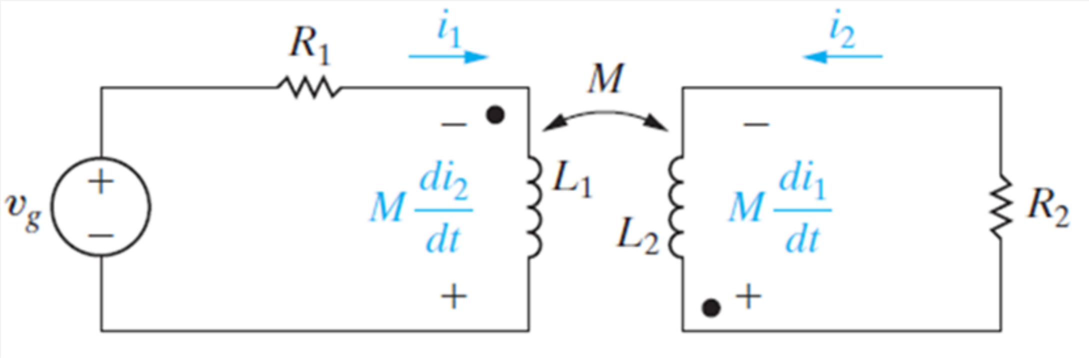
Η πολικότητα της τάσης από αμοιβαία επαγωγή εξαρτάται από τον τρόπο που είναι τυλιγμένα τα πηνία σε σχέση με τη φορά των ρευμάτων.

Για κάθε ζεύγος πηνίων, η πληροφορία αυτή δίνεται με τον λεγόμενο **κανόνα της τελείας (dot convention)**, *εικ. (γ)*.

Όταν η φορά αναφοράς ενός ρεύματος εισέρχεται από το άκρο ενός πηνίου με την τελεία, η πολικότητα αναφοράς της τάσης που επάγεται στο άλλο πηνίο είναι θετική στο άκρο του (άλλου πηνίου) με την τελεία, εικ. (δ).

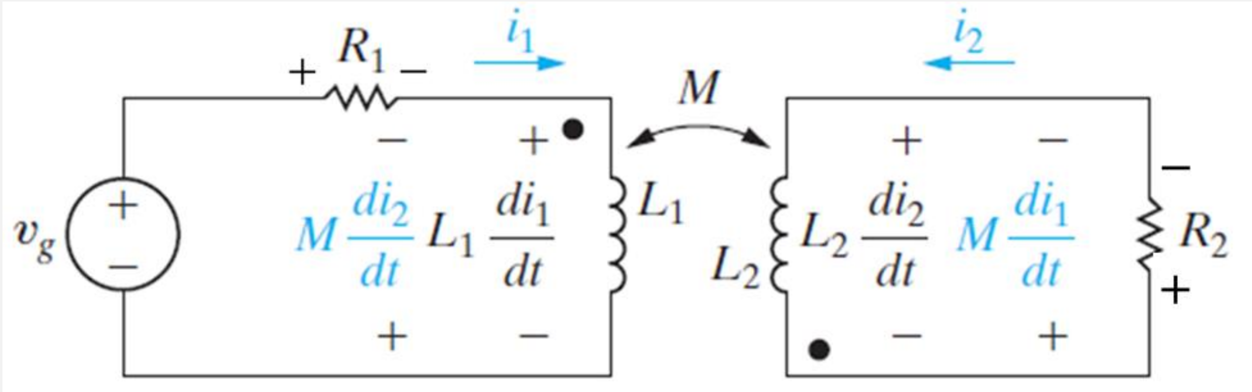


(γ)



(δ)

Εξισώσεις ρευμάτων βρόχων σε μαγνητικά συζευγμένα κυκλώματα



Για τη φορά των ρευμάτων που (αυθαίρετα) έχει επιλεγεί στο κύκλωμα της εικόνας οι εξισώσεις για τους δύο βρόχους γράφονται

για το βρόχο αριστερά

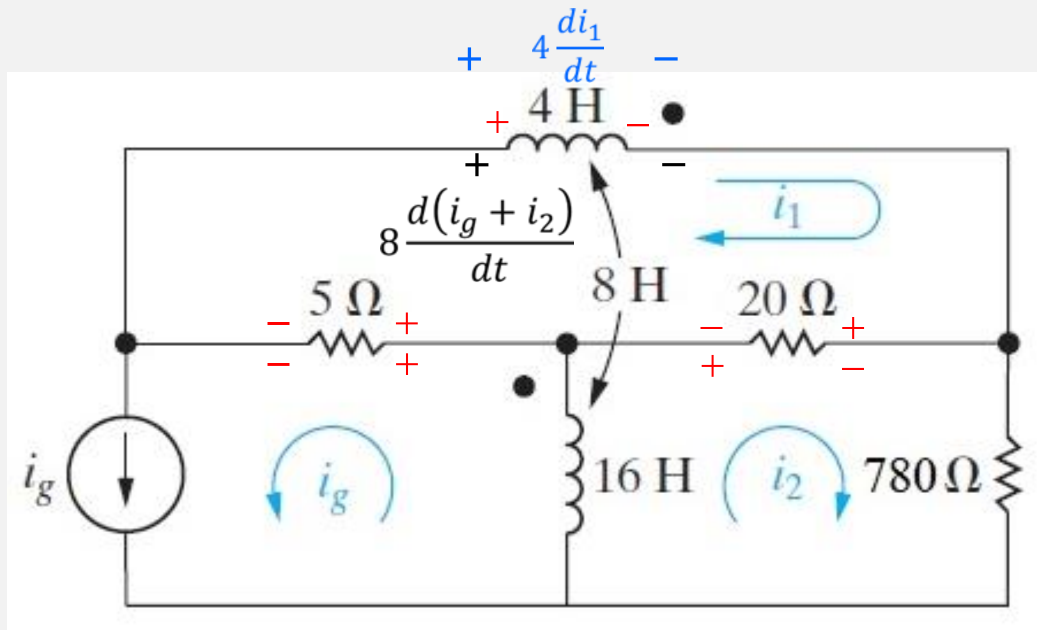
$$v_g - i_1 R_1 - L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = 0$$

για το βρόχο δεξιά

$$L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + i_2 R_2 = 0$$

Παράδειγμα 5.8

(α) Γράψτε ένα σύστημα εξισώσεων ρευμάτων βρόχων για το κύκλωμα της εικόνας. Είναι $i_g = 1.96 - 1.96e^{-4t}$ A



Λύση

Στο βρόχο του ρεύματος i_1

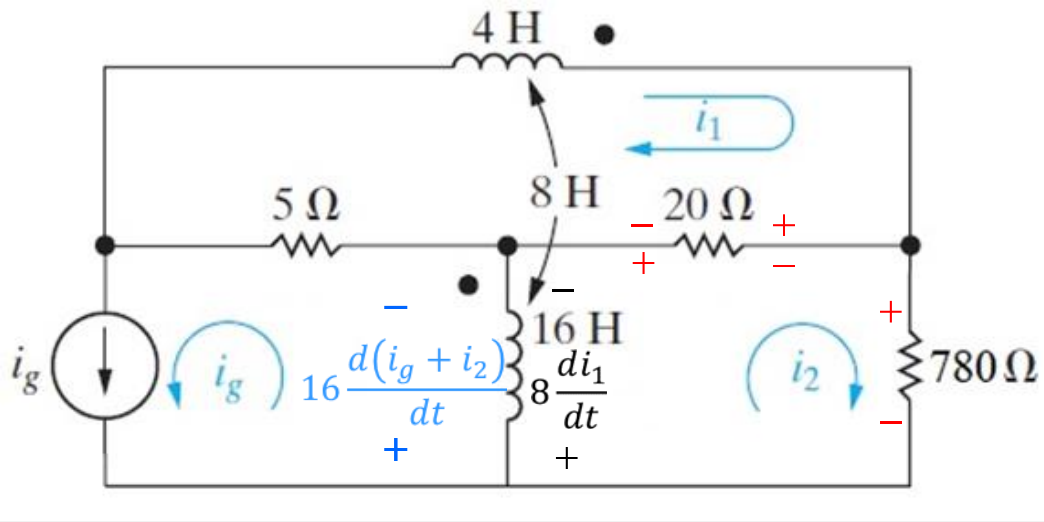
- η τάση από αυτεπαγωγή στο πηνίο 4H είναι $4\frac{di_1}{dt}$
- η τάση στο πηνίο 4H λόγω αμοιβαίας επαγωγής με το πηνίο 16H είναι $8\frac{d(i_g+i_2)}{dt}$
- προσέξτε, το ρεύμα στο πηνίο 16H είναι $i_g + i_2$ και εξέρχεται από την άκρη με την τελεία
- σημειώνοντας και τις πτώσεις τάσης λόγω ωμικών αντιστάσεων

η εξίσωση γράφεται

$$-4\frac{di_1}{dt} - 8\frac{d(i_g+i_2)}{dt} - 20(i_1 - i_2) - 5(i_1 + i_g) = 0$$

(*συνεχίζεται …*)

Λύση *(… συνέχεια)*



Στο βρόχο του ρεύματος i_2

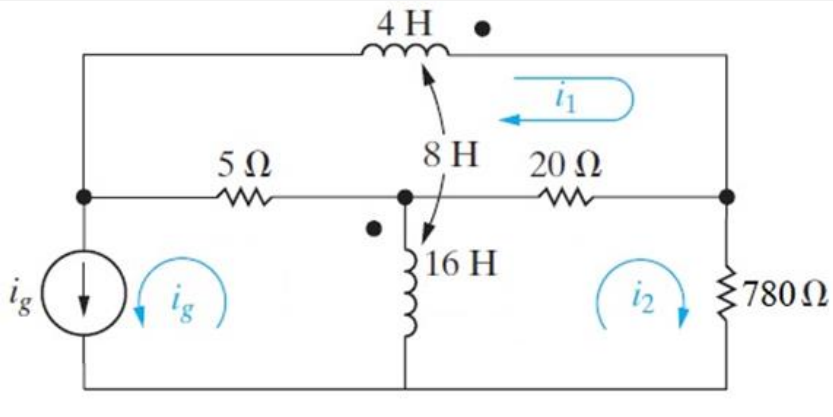
- η τάση από αυτεπαγωγή στο πηνίο 16H είναι $16\frac{d(i_g+i_2)}{dt}$
- η τάση στο πηνίο 16H λόγω αμοιβαίας επαγωγής με το πηνίο 4H είναι $8\frac{di_1}{dt}$
- προσέξτε, το ρεύμα στο πηνίο 4H είναι i_1 και εξέρχεται από την άκρη με την τελεία

Έτσι, για το βρόχο του ρεύματος i_2 η εξίσωση γράφεται

$$-780i_2 - 16\frac{d(i_g+i_2)}{dt} - 8\frac{di_1}{dt} - 20(i_2 - i_1) = 0$$

(συνεχίζεται …)

Λύση (*… συνέχεια*)



Το σύστημα των (διαφορικών) εξισώσεων για τα ρεύματα των δύο βρόχων είναι

$$4\frac{di_1}{dt} + 8\frac{d(i_g + i_2)}{dt} + 20(i_1 - i_2) + 5(i_1 + i_g) = 0$$

$$8\frac{di_1}{dt} + 16\frac{d(i_g + i_2)}{dt} + 780i_2 + 20(i_2 - i_1) = 0$$

Χωρίζοντας τους όρους με τα άγνωστα ρεύματα $i_1,\ i_2$ και αντικαθιστώντας την έκφραση για το ρεύμα της πηγής $i_g = 1.96 - 1.96e^{-4t}$ A, παίρνουμε

$$4\frac{di_1}{dt} + 25i_1 + 8\frac{di_2}{dt} - 20i_2 = -9.8 - 52.92e^{-4t} \text{ A}$$

$$8\frac{di_1}{dt} + 20i_1 - 16\frac{di_2}{dt} - 800i_2 = -125.44e^{-4t} \text{ A}$$

(*συνεχίζεται …*)

Παράδειγμα 5.8 (… *συνέχεια*)

(β) Αποδείξτε ότι, αν δεν υπάρχει ενέργεια αποθηκευμένη στο κύκλωμα για $t = 0$, οι λύσεις για τα ρεύματα i_1 και i_2 είναι

$$i_1 = -0.4 - 11.6e^{-4t} + 12e^{-5t} \text{ A}$$

$$i_2 = -0.01 - 0.99e^{-4t} + e^{-5t} \text{ A}$$

Λύση

Η απόδειξη γίνεται ελέγχοντας

(1) τις αρχικές τιμές των i_1 και i_2 (δηλαδή, τις τιμές για $t = 0$)

(2) τις τελικές τιμές τους (δηλαδή, μετά από άπειρο χρόνο, $t \to \infty$) και τέλος

(3) αν επαληθεύουν τις (διαφορικές) εξισώσεις του κυκλώματος, βλ. ερώτημα (α).

Για $t = 0$, από την υπόθεση, πρέπει $i_1(0) = i_2(0) = 0$

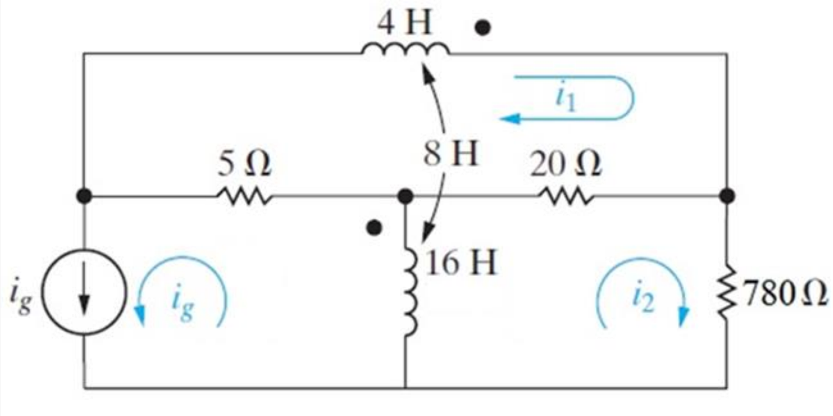
Πράγματι,

$$i_1(0) = -0.4 - 11.6 + 12 = 0$$

$$i_2(0) = -0.01 - 0.99 + 1 = 0$$

(*συνεχίζεται* …)

Λύση (*… συνέχεια*)

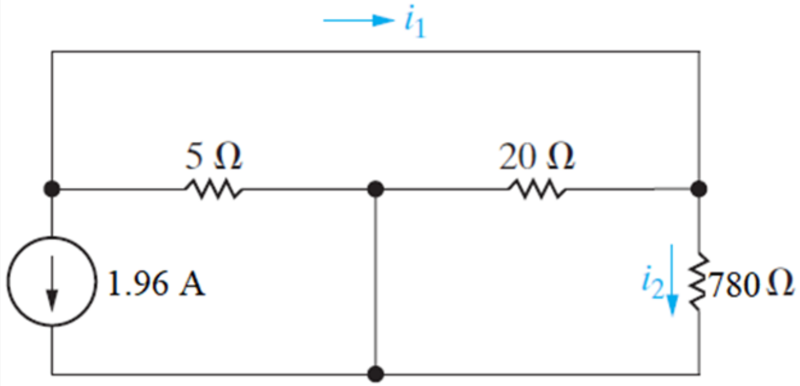


Καθώς $t \to \infty$,

$$i_g = 1.96 - 1.96e^{-4t} \;\; \longrightarrow \;\; 1.96 \text{ A}$$

δηλαδή, το ρεύμα της πηγής τείνει στη dc τιμή 1.96 A οπότε τα πηνία συμπεριφέρνονται σαν βραχυκυκλώματα.

Συνεπώς, για $t \to \infty$, το κύκλωμα γίνεται όπως στην *εικ. (β)*.



(β)

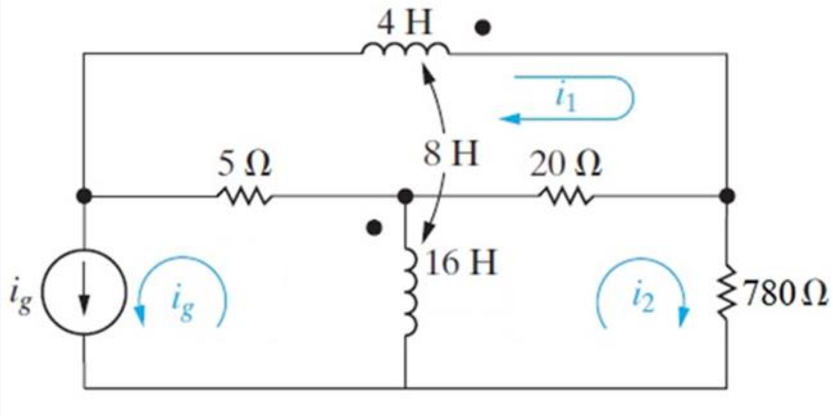
Οι τρεις αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα στην πηγή 1.96 A (;;;). Η ολική αντίσταση είναι 3.98 Ω

Με τη σχέση διαιρέτη τάσης, υπολογίζουμε το i_2 (διαρρέει την 780 Ω)

$$i_2 = \frac{3.98}{780}\,(-1.96 \text{ A}) = -0.01 \text{ A}$$

(*συνεχίζεται …*)

Λύση (… *συνέχεια*)



και το i_1 (διαρρέει τις 780 Ω και 20 Ω) είναι

$$i_1 = \left(\frac{3.98}{780} + \frac{3.98}{20}\right)(-1.96 \text{ A}) = -0.4 \text{ A}$$

Πράγματι, οι λύσεις για τα ρεύματα i_1 και i_2

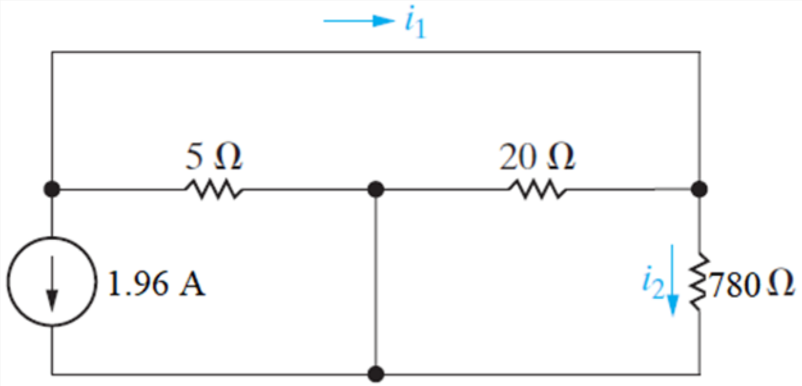
$$i_1 = -0.4 - 11.6e^{-4t} + 12e^{-5t} \text{ A}$$

$$i_2 = -0.01 - 0.99e^{-4t} + e^{-5t} \text{ A}$$

δίνουν

$$i_1(\infty) = -0.4 \text{ A}$$

$$i_2(\infty) = -0.01 \text{ A}$$

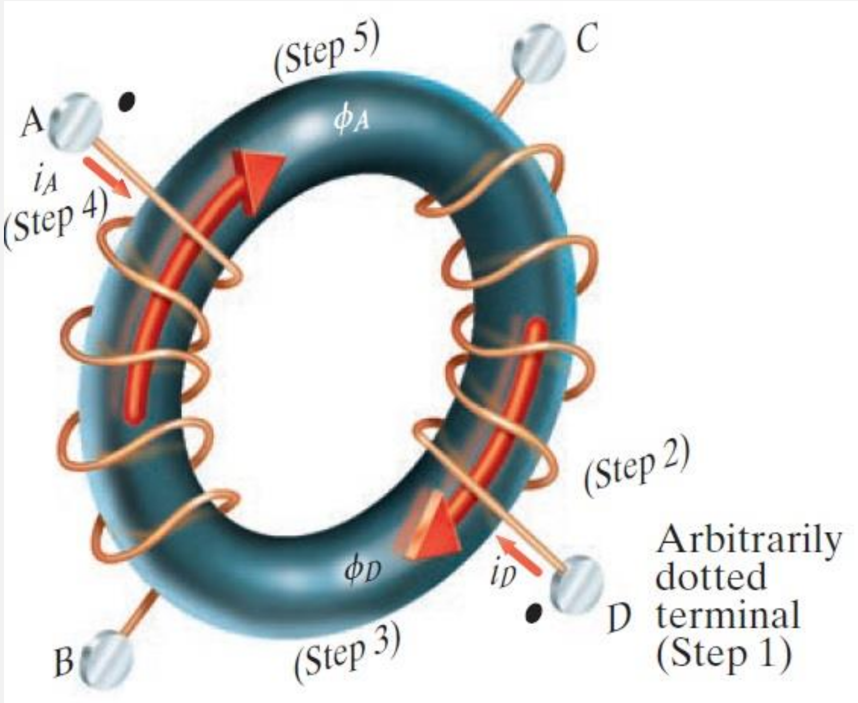


(β)

Άσκηση

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα i_1, i_2 και $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_1}{dt}$ επαληθεύστε τις δύο εξισώσεις ρευμάτων βρόχων που βρήκαμε στο (α).

Προσδιορισμός των θέσεων των τελειών στους ακροδέκτες δύο μαγνητικά συζευγμένων πηνίων αν γνωρίζουμε τη διάταξή τους στο χώρο και τον τρόπο που είναι περιελιγμένα.



Βήμα 1: Επιλέγουμε αυθαίρετα να μαρκάρουμε με τελεία έναν ακροδέκτη ενός πηνίου. Έστω τον D του δεξιού πηνίου.

Βήμα 2: θεωρούμε ένα ρεύμα σε αυτόν τον ακροδέκτη. Ας το ονομάσουμε i_D.

Βήμα 3: Με τον κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το i_D στα δύο συζευγμένα πηνία. Έστω ϕ_D το πεδίο.

Βήμα 4: Αυθαίρετα επιλέγουμε έναν ακροδέκτη του άλλου πηνίου, έστω τον A και του βάζουμε ένα ρεύμα, έστω i_A.

(*συνέχεια …*)

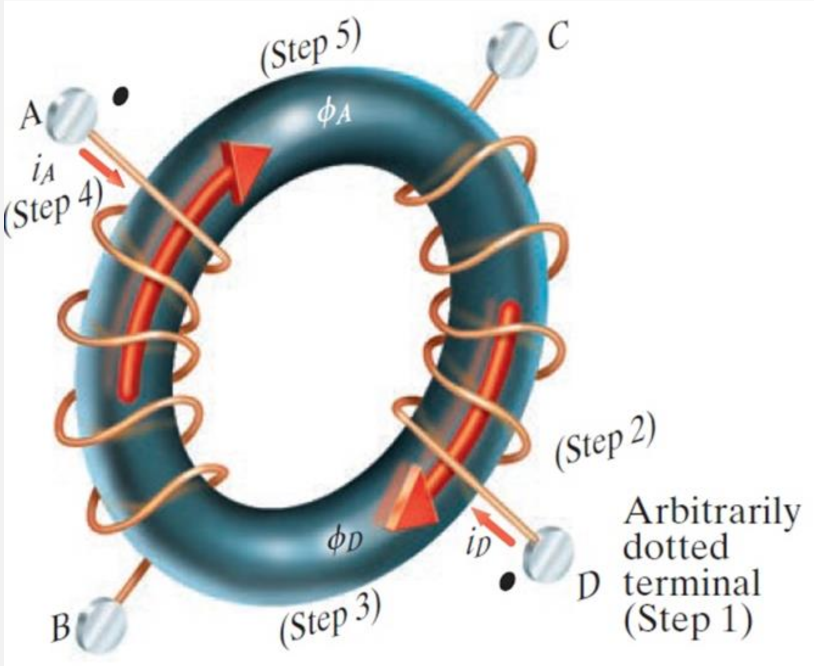
(… συνεχίζεται)

Βήμα 5: Πάλι με τον κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το i_A στα δύο συζευγμένα πηνία. Έστω ϕ_A.

Βήμα 6: Συγκρίνουμε τις σχετικές διευθύνσεις των δύο μαγνητικών ροών ϕ_Dκαι ϕ_A.

- Αν οι δυο ροές έχουν την ίδια διεύθυνση (όπως στην εικόνα), θέτουμε την τελεία στον ακροδέκτη του δεύτερου πηνίου όπου εισέρχεται το ρεύμα δοκιμής i_A.

- Αν οι δύο ροές είναι αντίθετων διευθύνσεων, θέτουμε την τελεία στον ακροδέκτη του δεύτερου πηνίου όπου από όπου εξέρχεται το ρεύμα δοκιμής i_A.



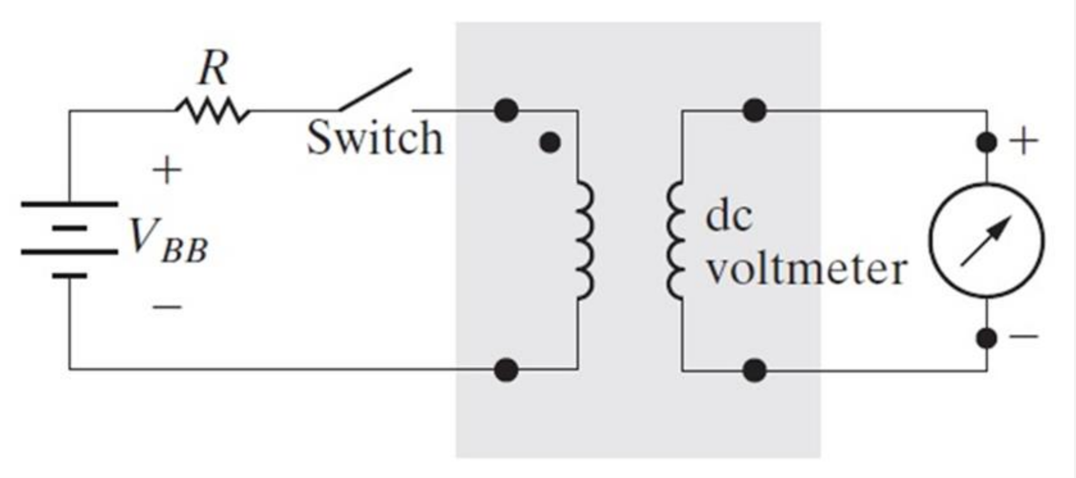
Πειραματική μέθοδος προσδιορισμού των θέσεων των τελειών στους ακροδέκτες δύο μαγνητικά συζευγμένων πηνίων.

Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν έχουμε εικόνα του τρόπου που τα δύο πηνία είναι περιελιγμένα (συνήθως σε έναν κοινό πυρήνα μαγνητικού υλικού).

Χρησιμοποιούμε μια πειραματική διάταξη όπως στην *εικ. (α)*.

Θέτουμε μια τελεία στον ακροδέκτη του πηνίου που συνδέεται με το θετικό πόλο της πηγής V_{BB} μέσω ενός διακόπτη (Switch) και μιας αντίστασης περιορισμού του ρεύματος (R, γιατί;).

Κλείνουμε το διακόπτη και παρατηρούμε τη φορά απόκλισης του βολτομέτρου (dc voltmeter).



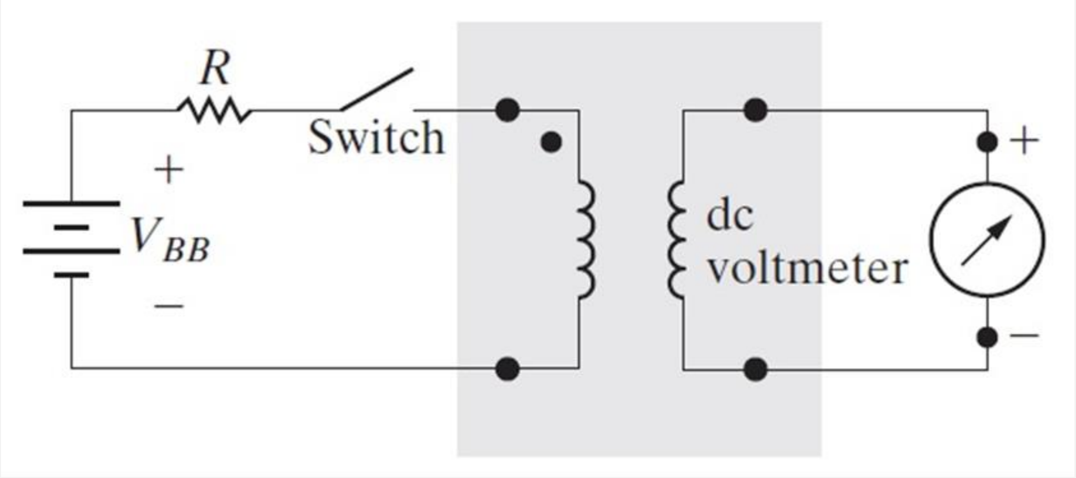
(α)

(*συνέχεια …*)

(… συνεχίζεται)

- Αν η στιγμιαία απόκλιση του δείκτη του βολτομέτρου (ή η ένδειξη του ψηφιακού βολτομέτρου) είναι θετική, θέτουμε την τελεία στον ακροδέκτης του πηνίου που συνδέεται με το θετικό ακροδέκτη του βολτομέτρου

- Αν η στιγμιαία απόκλιση του βολτομέτρου είναι αρνητική, η τελεία πηγαίνει στον ακροδέκτη του πηνίου που είναι συνδεμένος με τον αρνητικό ακροδέκτη του βολτομέτρου.



(α)

Κάνετε μια προσομοίωση της πειραματικής μεθόδου προσδιορισμού των θέσεων των τελειών στους ακροδέκτες δύο μαγνητικά συζευγμένων πηνίων χρησιμοποιώντας το κύκλωμα

Experimental determination of polarity marks

στην ομάδα

ECE-UOWM MK18

στο Multisim Live