

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι

Κεφάλαιο 4

Τεχνικές ανάλυσης
κυκλωμάτων

Μέρος Α

- Η μέθοδος κόμβων
- Η μέθοδος κόμβων με εξαρτημένες πηγές
- Ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου κόμβων

Η μέθοδος των τάσεων κόμβων – Τα βήματα

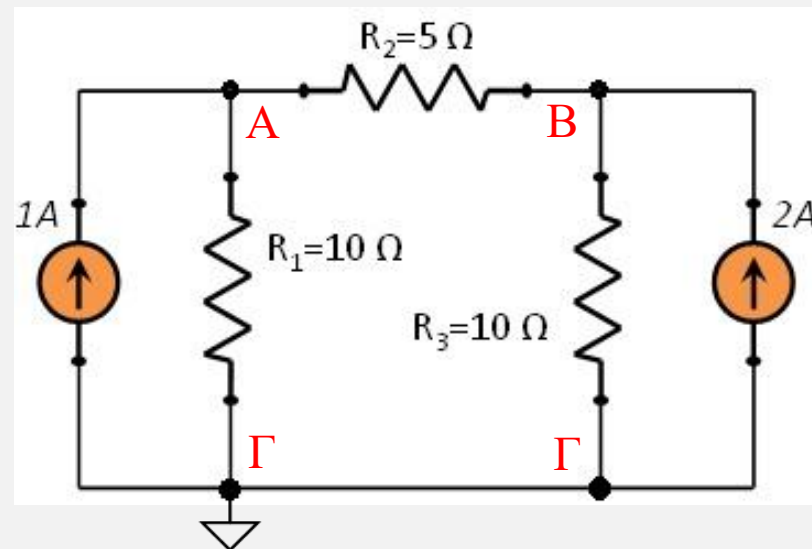
Βήμα 1^ο: Σημειώνουμε τους κόμβους στο κύκλωμα

Π.χ., *Εικ. (α)*: Α, Β και Γ

Βήμα 2^ο: Ορίζουμε έναν από αυτούς σαν **κόμβο αναφοράς** και τον σημειώνουμε με το σύμβολο της γείωσης (∇ ή \perp)

Π.χ., *Εικ. (α)*: Κόμβος Γ

- Η επιλογή του κόμβου αναφοράς είναι αυθαίρετη
- Μια καλή επιλογή είναι ο κόμβος με τους περισσότερους κλάδους



(α)

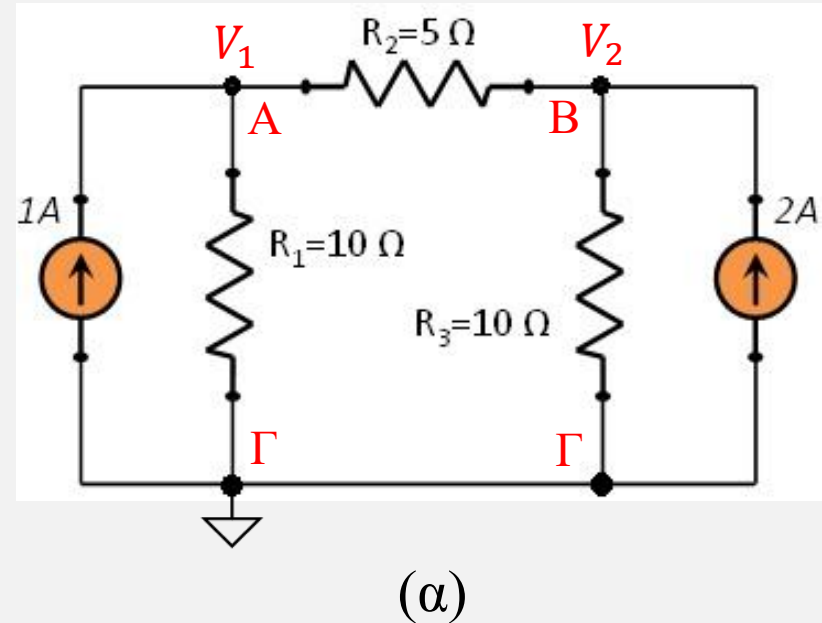
(συνεχίζεται...)

Η μέθοδος των τάσεων κόμβων – Τα βήματα (... συνέχεια)

Βήμα 3^ο: Ορίζουμε σαν αγνώστους τις τάσεις των υπολοίπων $n - 1$ κόμβων ($n =$ πλήθος κόμβων κυκλώματος)

Π.χ., *εικ. (α)*, V_1 και V_2

- Ως τάση ενός κόμβου ορίζεται η διαφορά δυναμικού του (τάση) ως προς τον κόμβο αναφοράς



Η μέθοδος των τάσεων κόμβων – Τα βήματα (... συνέχεια)

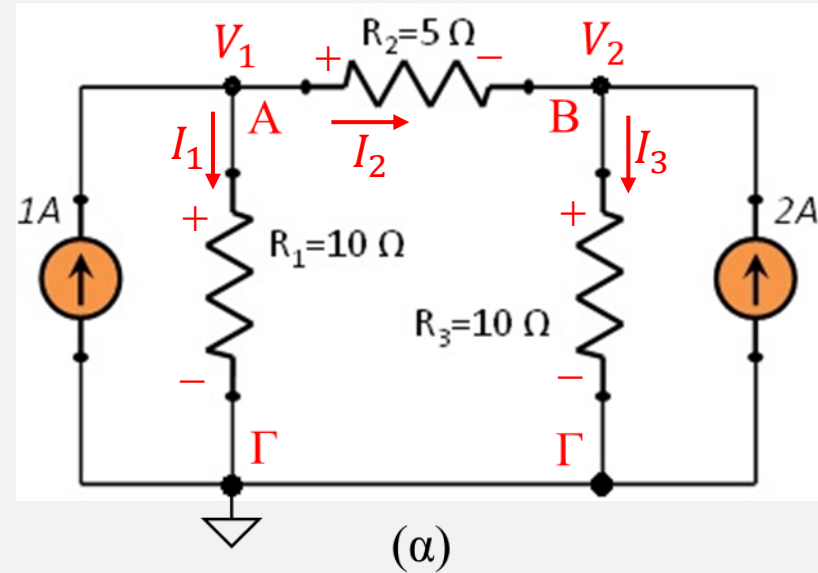
Βήμα 4^ο: Σημειώνουμε το ρεύμα σε κάθε κλάδο

και φτιάχνουμε τις εξισώσεις των $n - 1$ κόμβων χρησιμοποιώντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff.

Π.χ., *εικ. (α)*

– κόμβος A: $I_1 + I_2 - 1 = 0$

– κόμβος B: $-I_2 + I_3 - 2 = 0$



Εκφράζουμε τις $n - 1$ εξισώσεις ρευμάτων συναρτήσει των $n - 1$ τάσεων των κόμβων χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm για κάθε ρεύμα (προσέξτε την πολικότητα της πτώσης τάσης στις αντιστάσεις)

Π.χ., *εικ. (α)*: Για τον κόμβο A: $\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} - 1 = 0$

$$\frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{5} - 1 = 0 \Rightarrow 3 \cdot V_1 - 2 \cdot V_2 = 10 \quad (\text{συνεχίζεται...})$$

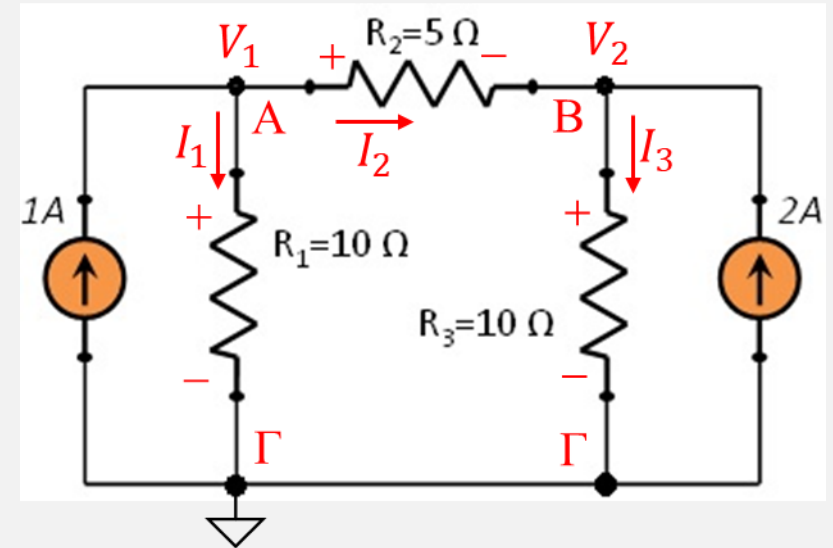
Η μέθοδος των τάσεων κόμβων – Τα βήματα (... συνέχεια)

Για τον κομβο Β: $-I_2 + I_3 - 2 = 0$

$$-\frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} - 2 = 0$$

$$-\frac{V_1 - V_2}{5} + \frac{V_2}{10} - 2 = 0$$

$$2 \cdot V_1 - 3 \cdot V_2 = -20$$



Βήμα 5^ο: Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων ως προς τις άγνωστες τάσεις V_1 και V_2 των κόμβων

Π.χ., *εικ. (α)*

$$3 \cdot V_1 - 2 \cdot V_2 = 10$$

$$2 \cdot V_1 - 3 \cdot V_2 = -20$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -20 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = 14 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = 16 \text{ V}$$

(συνεχίζεται...)

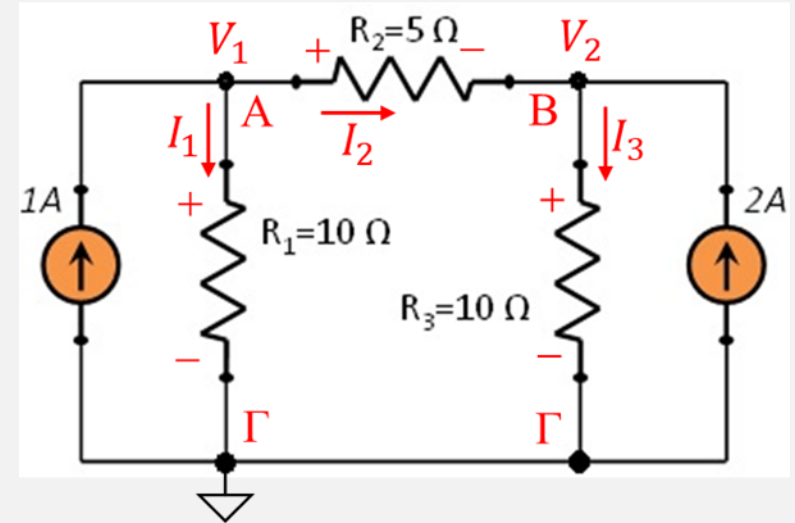
Η μέθοδος των τάσεων κόμβων – Τα βήματα (... συνέχεια)

Από τις τάσεις V_1 και V_2 των κόμβων υπολογίζουμε εύκολα τα ρεύματα του κυκλώματος:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{14 \text{ V}}{10 \Omega} = 1.4 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{14 \text{ V} - 16 \text{ V}}{5 \Omega} = -0.4 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{16 \text{ V}}{10 \Omega} = 1.6 \text{ A}$$



Έλεγξε την απάντηση με το κύκλωμα
Node-Voltage Method Example
στο MulisimLive group
ECE-UOWM MK18

Έλεγε την απάντηση στο Παράδειγμα 4.6 με το κύκλωμα

Example 4_6

στο MultisimLive group

ECE-UOWM MK18

Μια περισσότερο συνοπτική μορφή της μεθόδου των τάσεων κόμβων

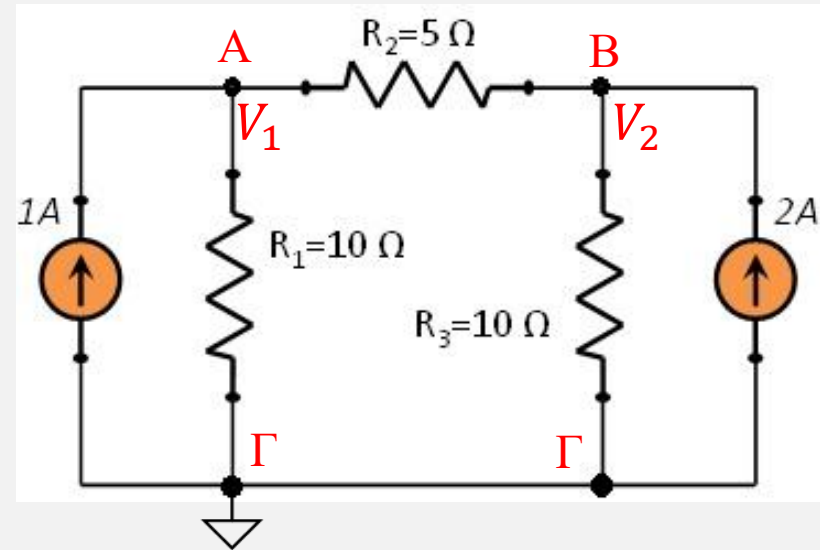
- Η χρήση της μεθόδου απλοποιείται πολύ αν τα ρεύματα των κόμβων εκφράσουμε άμεσα με τις τάσεις και τις αντιστάσεις μεταξύ γειτονικών κόμβων (4^ο βήμα)

Παράδειγμα: στο κύκλωμα της εικόνας, οι εξισώσεις για τις τάσεις V_1 και V_2 των κόμβων A και B, αντίστοιχα, γράφονται

$$-1A + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{5} = 0$$

και

$$\frac{V_2 - V_1}{5} + \frac{V_2}{10} - 2A = 0$$



(α)

Η μέθοδος των κόμβων με εξαρτημένες πηγές

Παράδειγμα 4.6

Χρησιμοποιήστε την μέθοδο κόμβων για να βρείτε την ισχύ που σχετίζεται με κάθε πηγή στο κύκλωμα

Λύση

Είναι κύκλωμα τριών κόμβων (1, 2 και 3).

Ορίζουμε τον κόμβο 3 σαν κόμβο αναφοράς

Η εξίσωση για την τάση του κόμβου 1 γράφεται

$$-i_1 + \frac{V_1}{8} + \frac{V_1 - V_2}{2} - 3i_1 = 0$$

$$5V_1 - 4V_2 = 32i_1 \quad (1)$$

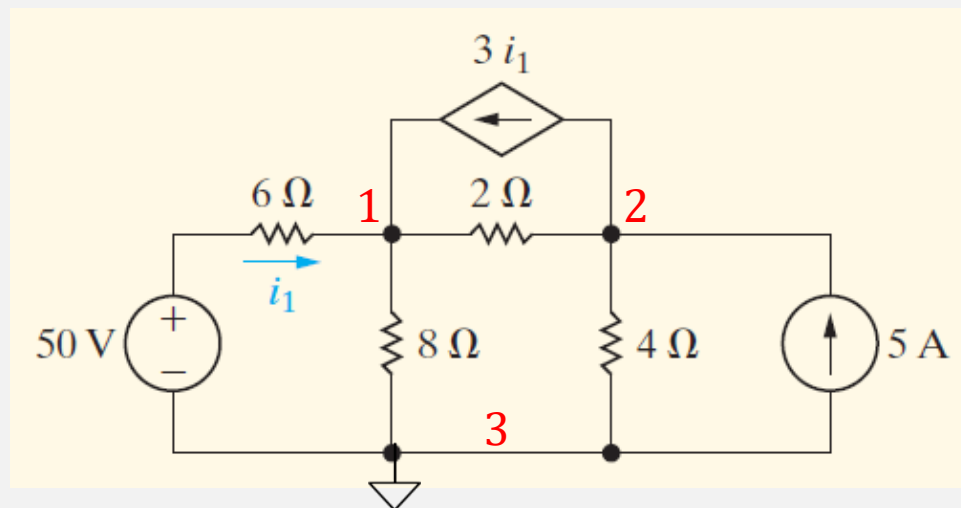
Στον κλάδο της πηγής 50 V και αντίστασης 6 Ω, έχουμε (νόμος τάσεων Kirchhoff)

$$V_1 = 50 - 6i_1 \Rightarrow i_1 = (50 - V_1)/6$$

και η (1) γίνεται

$$31V_1 - 12V_2 = 800 \quad (2)$$

(συνεχίζεται...)



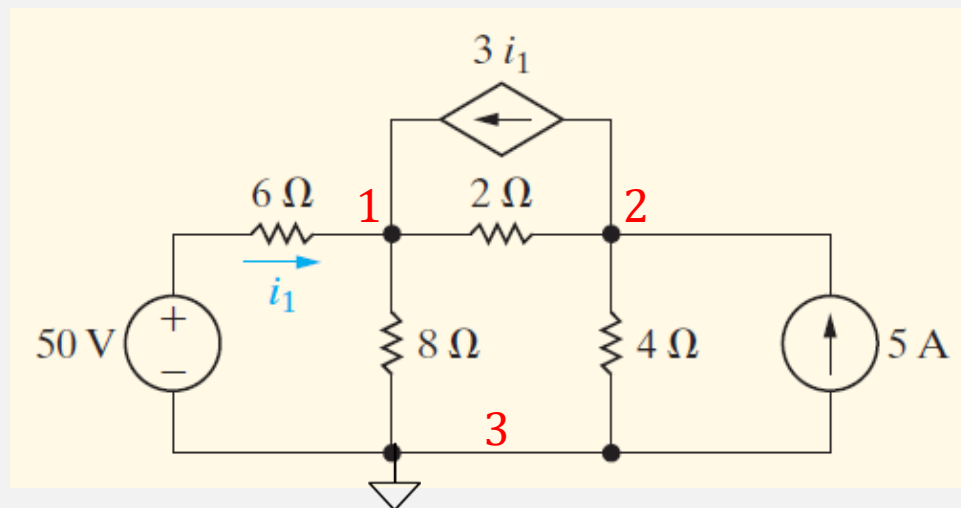
Λύση (συνέχεια)

$$31V_1 - 12V_2 = 800 \quad (2)$$

Η εξίσωση για την τάση του κόμβου 2 γράφεται

$$\frac{V_2 - V_1}{2} + 3i_1 + \frac{V_2}{4} - 5 = 0$$

$$2V_1 - 3V_2 = 12i_1 - 20$$



και αντικαθιστώντας $i_1 = (50 - V_1)/6$ παίρνουμε

$$4V_1 - 3V_2 = 80 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3), βρίσκουμε

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 800 & -12 \\ 80 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 31 & -12 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = 32V \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 800 \\ 4 & 80 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 31 & -12 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = 16V$$

(συνεχίζεται...)

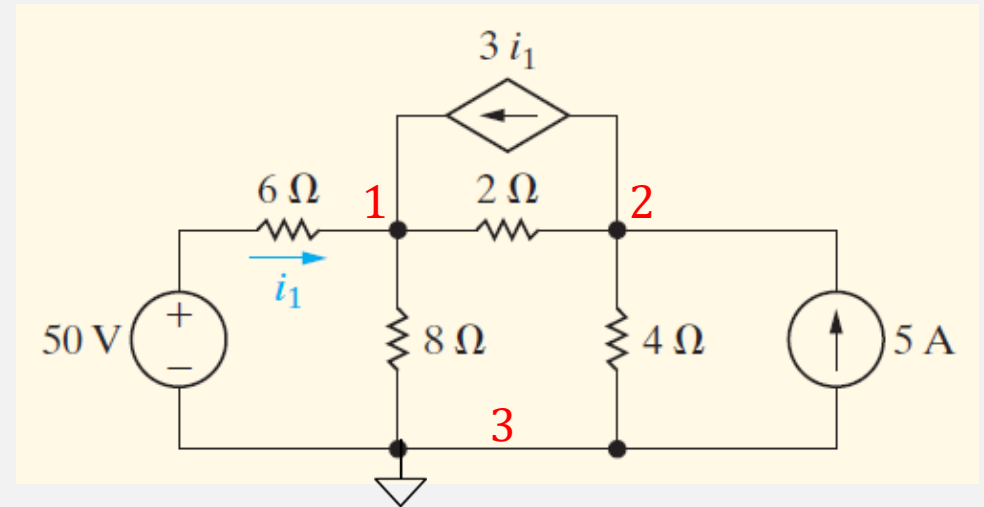
Λύση (συνέχεια)

Γνωρίζοντας την τάση $V_1 = 32\text{ V}$,
βρίσκουμε το ρεύμα i_1

$$i_1 = (50 - V_1)/6 = 3\text{ A}$$

και, επομένως, την ισχύ που αποδίδει
(γιατί;) η πηγή 50 V είναι

$$P_{50\text{V}} = (50\text{ V})(3\text{ A}) = \mathbf{150\text{ W}}$$



Γνωρίζοντας την τάση $V_2 = 16\text{ V}$, βρίσκουμε την ισχύ που αποδίδει (γιατί;) η πηγή 5 A

$$P_{5\text{A}} = (16\text{ V})(5\text{ A}) = \mathbf{80\text{ W}}$$

Τέλος, γνωρίζοντας τις τάσεις στους πόλους της εξαρτημένης πηγής $3i_1$ καθώς και την τιμή και την πολικότητα του ρεύματος $3i_1$ που δημιουργεί, βρίσκουμε ότι η ισχύς που αποδίδει (;) είναι

$$P_{3i_1} = (V_1 - V_2)(3i_1) = (32 - 16)(3 \cdot 3) = \mathbf{144\text{ W}}$$

Έλεγε την απάντηση στο Παράδειγμα 4.6 με το κύκλωμα

Example 4_6

στο MultisimLive group

ECE-UOWM MK18

Παράδειγμα 4.7

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο κόμβων για να βρείτε την v_o .

Απάντηση

Το κύκλωμα περιέχει 4 κόμβους (1, 2, 3 και 4).

Ορίζουμε τον κόμβο 4 σαν κόμβο αναφοράς.

Η ζητούμενη τάση v_o είναι η τάση του κόμβου 2, $v_o = V_2$, για την οποία η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{40} + \frac{V_2 - V_3}{20} = 0 \quad (1)$$

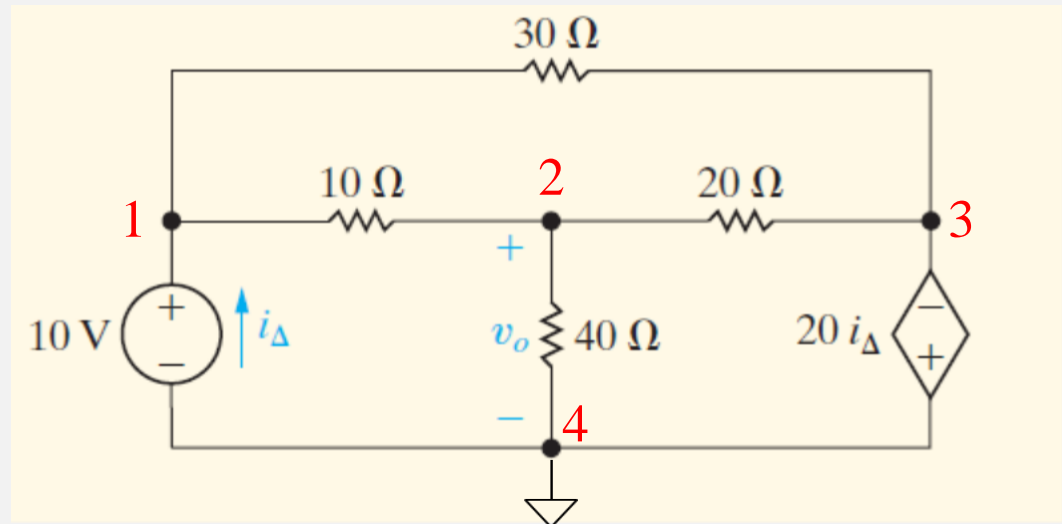
Για την τάση του κόμβου 1, έχουμε $V_1 = 10 \text{ V}$ και του κόμβου 3, $V_3 = -20i_\Delta$

Αντικαθιστώντας στην (1), παίρνουμε

$$\frac{V_2 - 10}{10} + \frac{V_2}{40} + \frac{V_2 + 20i_\Delta}{20} = 0$$

$$7V_2 + 40i_\Delta = 40 \quad (2)$$

(συνεχίζεται ...)



Απάντηση (... συνέχεια)

$$7V_2 + 40i_\Delta = 40 \quad (2)$$

Η εξίσωση για τον κόμβο 1 γράφεται

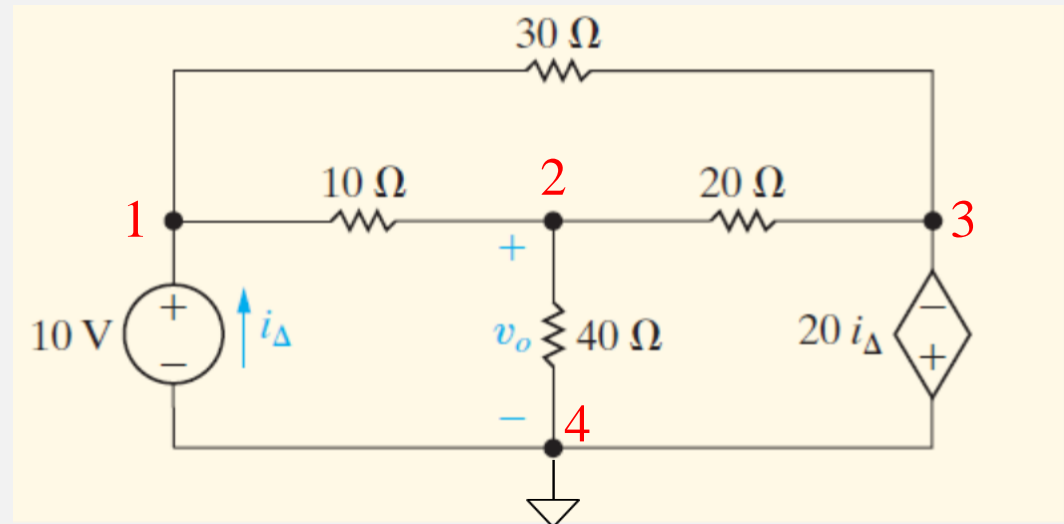
$$-i_\Delta + \frac{V_1 - V_2}{10} + \frac{V_1 - V_3}{30} = 0$$

και, αντικαθιστώντας $V_1 = 10 \text{ V}$ και $V_3 = -20i_\Delta$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} -i_\Delta + \frac{10 - V_2}{10} + \frac{10 + 20i_\Delta}{30} &= 0 \\ 3V_2 + 10i_\Delta &= 40 \quad (3) \end{aligned}$$

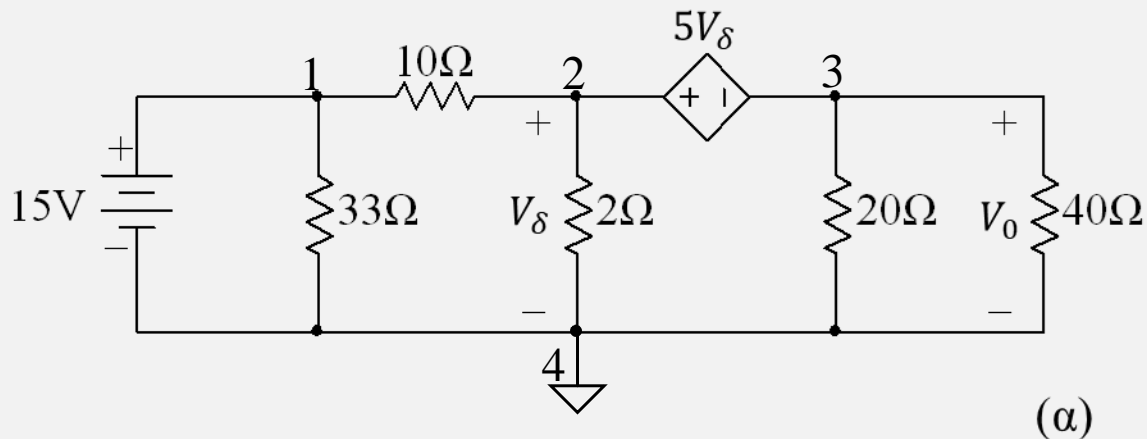
Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3), βρίσκουμε

$$v_o = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 40 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}} = 24\text{V}$$



Παράδειγμα 4.8

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο κόμβων για να βρείτε την V_0 στο κύκλωμα της εικ. (α).



Απάντηση

Το κύκλωμα περιέχει 4 κόμβους. Τους αριθμούμε σαν 1, 2, 3 και 4.

Ορίζουμε τον κόμβο 4 σαν κόμβο αναφοράς.

Περιμένουμε να γράψουμε $4 - 1 = 3$ εξισώσεις.

Όμως, οι κόμβοι 1 και 4 συνδέονται μέσω της ανεξάρτητης πηγής τάσης 15 V, επομένως,

$$V_1 = 15 \text{ V} \quad (1)$$

Επίσης, οι κόμβοι 2 και 3 συνδέονται μέσω της εξαρτημένης πηγής τάσης $5V_\delta$, οπότε έχουμε:

$$V_2 - V_3 = 5V_\delta$$

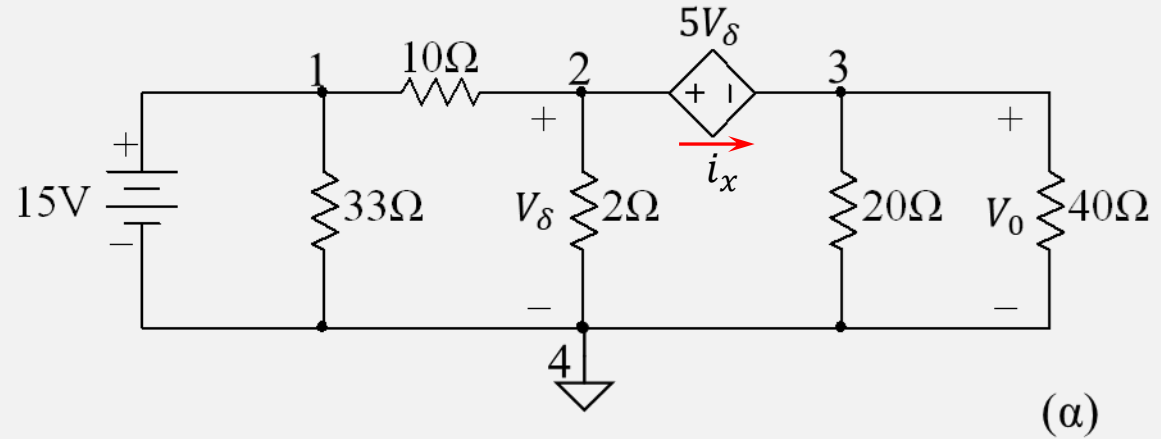
Επειδή, $V_2 = V_\delta$, από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε

$$4V_2 = -V_3 \quad (2) \quad (\text{συνεχίζεται ...})$$

Απάντηση (... συνέχεια)

Επομένως, στο κύκλωμα της εικ. (α) έχουμε πρακτικά έναν άγνωστο: την τάση V_2 ή την V_3 .

Έστω i_x το ρεύμα που διαρρέει την πηγή τάσης $5V_\delta$.



Γράφοντας την εξίσωση των ρευμάτων για τον κόμβο 2,

$$\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{2} + i_x = 0$$

και τον κόμβο 3

$$-i_x + \frac{V_3}{20} + \frac{V_3}{40} = 0 \Rightarrow i_x = \frac{3V_3}{40}$$

και απαλείφοντας μεταξύ τους το άγνωστο ρεύμα i_x , παίρνουμε

$$4V_1 - 24V_2 - 3V_3 = 0 \quad (3)$$

(συνεχίζεται ...)

Απάντηση (... συνέχεια)

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$V_1 = 15 \text{ V} \quad (1)$$

$$4V_2 = -V_3 \quad (2)$$

$$4V_1 - 24V_2 - 3V_3 = 0 \quad (3)$$

βρίσκουμε $V_0 = V_3 = -20 \text{ V}$

Έλεγξε την απάντηση στο Παράδειγμα 4.8 με το κύκλωμα

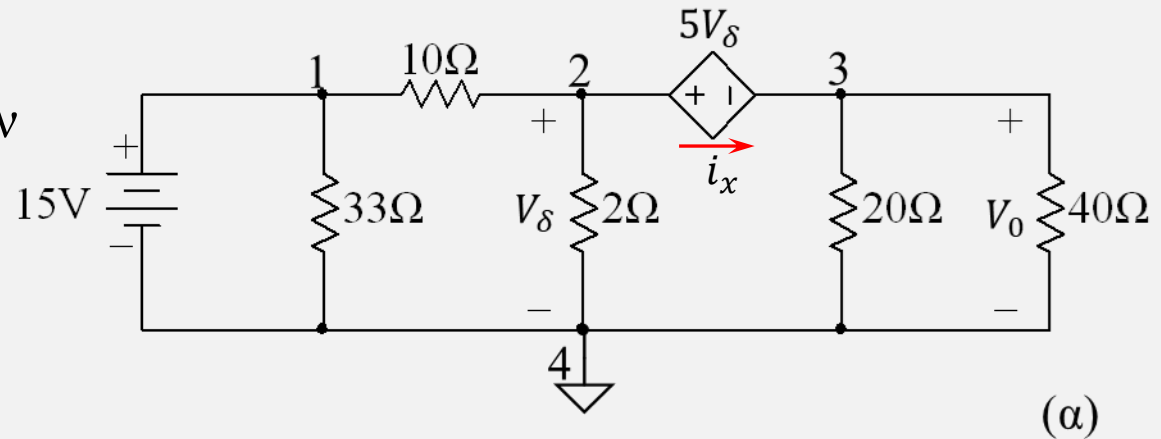
Example 4_8

στο MultisimLive group *ECE-UOWM MK18*

Πρόβλημα

(α) Σαν συνέχεια της λύσης του Παραδείγματος 4.8, υπολογίστε τα ρεύματα που διαρρέουν όλες τις αντιστάσεις.

(β) Υπολογίστε την ισχύ της ελεγχόμενης πηγής τάσης $5V_\delta$



Έλεγε την απάντηση στο Παράδειγμα 4.8 με το κύκλωμα

Example 4_8

στο MultisimLive group

ECE-UOWM MK18