

*ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ*

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ (II)

MODERN CONTROL THEORY

(1η ΕΝΟΤΗΤΑ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ)

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Έστω το Γ.Χ.Α σύστημα που περιγράφεται από την
(πινακοδιαφορική) εξίσωση κατάστασης

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Η επίλυση της πινακοδιαφορικής αυτής εξίσωσης δίνει την τιμή της κατάστασης $\mathbf{x}(t)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq t_0$ και κατά συνέπεια την τιμή της εξόδου $\mathbf{y}(t)$ μέσω της εξίσωσης

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Η επίλυση της πινακοδιαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad \text{Όταν ο αρχικός χρόνος είναι ο } t=0$$

Ή από τον τύπο

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad \text{Όταν ο αρχικός χρόνος είναι ο } t=t_0$$

Ο πίνακας $e^{\mathbf{A}t}$ ονομάζεται **εκθετικός πίνακας** ή πίνακας **μετάβασης κατάστασης**. Μια άλλη ονομασία του είναι **επιλυτικός πίνακας** (γιατί είναι χρήσιμος στην επίλυση της εξ. Κατάστασης). Δίνεται από την ακόλουθη ανάπτυξη σε σειρά απείρων όρων

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \dots)$$

Ή μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots = e^{\mathbf{A}t}$$

Οι τεχνικές επίλυσης των εξ. κατάστασης στοχεύουν στον υπολογισμό του $e^{\mathbf{A}t}$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

A. Με τη βοήθεια υπολογιστή (για κάθε χρονική στιγμή t)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση
$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \dots)$$

Για κάθε χρονική στιγμή t υπολογίζω τους διαδοχικούς όρους της σειράς μέχρι και τον όρο που δεν επηρεάζει αισθητά το αποτέλεσμα

Μπορεί κανείς να γράψει ένα απλό πρόγραμμα γι' αυτό τον σκοπό, ή να χρησιμοποιήσει τη συνάρτηση **expm** του Matlab. Π.χ. για τον πίνακα $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

```
>> a=[0 1; -2 -3];  
>> t=0;  
>> expm(a*t)  
ans =  
    1    0  
    0    1  
  
>> t= 0.1;  
>> expm(a*t)  
ans =  
    0.9909    0.0861  
   -0.1722    0.7326
```



```
>> t= 2;  
>> expm(a*t)  
  
ans =  
    0.2524    0.1170  
   -0.2340   -0.0987
```

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

B. Με τον αλγόριθμο Leverier (αναλυτική λύση)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Υπολογίζω τον πίνακα

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{S^{n-1}F_1 + S^{n-2}F_2 + \dots + SF_{n-1} + F_n}{S^n + \alpha_1 S^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}S + \alpha_n} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

Από τις επαναληπτικές σχέσεις

$$\text{όπου } \text{ίχνος}(A) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$$

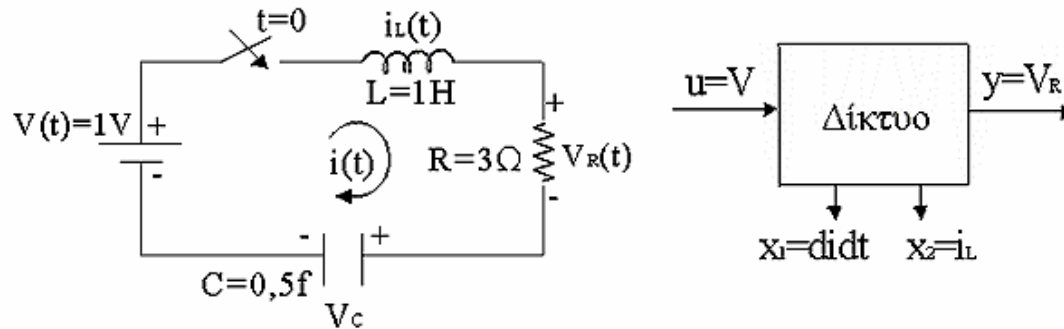
$$\begin{aligned} F_1 &= I & \alpha_1 &= -\text{ίχνος}(AF_1) \\ F_2 &= AF_1 + \alpha_1 I & \alpha_2 &= -(1/2)\text{ίχνος}(AF_2) \\ &\vdots & & \\ F_n &= AF_{n-1} + \alpha_{n-1} I & \alpha_n &= -(1/n)\text{ίχνος}(AF_n) \\ &\text{και τελική συνθήκη} & & \\ F_{n+1} &= AF_n + \alpha_n I = 0 & & \text{για έλεγχο σφάλματος} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετ. Laplace του πίνακα $\Phi(s)$ υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετ. Laplace κάθε στοιχείου του

Κάθε στοιχείο του πίνακα $\Phi(s)$ είναι ρητή παράσταση πολυωνυμικών όρων, η οποία θα πρέπει πρώτα να αναλυθεί σε άθροισμα μερικών κλασμάτων

ΈΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω το σύστημα



$$i = C \frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{1}{C} \int i dt$$

Νόμος τάσεων

$$\frac{di}{dt} + 3i + 2 \int_0^t i dt = V(t)$$

ορίζονται : $x_1(t) = \int_0^t i(t) dt$, $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = i_L(t) = i(t)$
με $x(0)=x_0=[0,1]$ και $u(t)=V(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Με τη μέθοδο Leverier έχουμε

$$\Phi(S) = (SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}\Phi(S) =$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \Phi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

ΈΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ...

πράγματι $\det(SI-A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s(s+3) + 2 = s^2 + 3s + 2$

$$s_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad \begin{matrix} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{matrix}$$

Άρα χαρακτηριστικό πολυώνυμο **$P(S) = S^2 + 3S + 2 = (S+1)(S+2)$** κατά συνέπεια (leverier).

$$\Phi(S) = (SI - A)^{-1} = \frac{SF_1 + F_2}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{όπου } \mathbf{F}_1 = \mathbf{I} \quad \alpha_1 = -\text{ίχνος}(AF_1) = -\text{ίχνος}(A) = 3$$

$$F_2 = AF_1 + \alpha_1 I = A + 3I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{ίχνος} \quad (AF_2)$$

μπορούμε ακολούθως να υπολογίσουμε το F_3 και να επαληθεύσουμε τη σχέση

$$\mathbf{F}_3 = A \mathbf{F}_2 + \alpha_2 \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

ΈΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ...

Ακολουθώντας αναλύουμε το: $\Phi(S) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{S-\lambda_i} \Phi_i$ $\lambda_{i, i=1,2} = -1, -2$

$$\Phi_i = \lim_{S \rightarrow \lambda_i} (S - \lambda_i) \Phi(S)$$

Δεδομένου ότι

$$\Phi(S) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \lim_{S \rightarrow -1} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+2} & \frac{s}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \lim_{S \rightarrow -2} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{-2}{s+1} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } \Phi(S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Το ίδιο προκύπτει φυσικά αν κάνουμε μερική ανάλυση σε κλάσματα του κάθε όρου του πίνακα $\Phi(S)$ ξεχωριστά

$$\Phi(t) = L^{-1} \{ \Phi(S) \} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

ΈΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ...

Η λύση της ομογενούς είναι

$$\Phi(t) = L^{-1}\Phi(S) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

και γενική λύση

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\lambda)bu(\lambda)d\lambda$$

$$\text{όπου } \int_0^t \Phi(t-\lambda)bu(\lambda)d\lambda = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\lambda)} - e^{-2(t-\lambda)} \\ -e^{-(t-\lambda)} + 2e^{-2(t-\lambda)} \end{bmatrix} u(\lambda)d\lambda =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} \int_0^t e^{\lambda} d\lambda - e^{-2t} \int_0^t e^{2\lambda} d\lambda \\ -e^{-t} \int_0^t e^{\lambda} d\lambda + 2e^{-2t} \int_0^t e^{2\lambda} d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

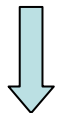
Γ. Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών (αναλυτική λύση)

βασίζεται στην διαγωνοποίηση του πίνακα A (ή στον μετασχηματισμό του σε μορφή Jordan) και στις ιδιότητες των συναρτήσεων των πινάκων για τις οποίες ισχύουν:

Αν οι πίνακες A, B συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού ομοιότητας $B = MAM^{-1}$ και ισοδύναμα $A = M^{-1}BM$ τότε $f(A) = M^{-1}f(B)M$ και $f(B) = M f(A) M^{-1}$

Επίσης ισχύει ότι αν ο $A_{\text{block διαγώνιος}} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \Rightarrow f(A) = \{f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)\}$

Στην περίπτωση που ο A είναι διαγώνιος $= A_d = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, η παραπάνω σχέση μας δίνει


$$e^{A_d t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Από τις σχέσεις ομοιότητας προκύπτει ότι



$$A = MA_d M^{-1} \Rightarrow e^{At} = M e^{A_d t} M^{-1}$$

Οι στήλες του πίνακα M είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A

Για να βρούμε εύκολα τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση **eig** του Matlab. Αλλιώς, με το χέρι ...

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Για τον υποπίνακα όμως Jordan ισχύει:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{f^{n-1}(\lambda_i)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

οι παραγωγές είναι ως προς λ_i

κατά συνέπεια η $e^{J_i t}$ γίνεται:

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Έστω

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \vdots & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ & & & \vdots & \lambda_4 & 1 & \vdots \\ & & & \vdots & 0 & \lambda_4 & \vdots \\ & & & & \dots & \dots & \vdots \\ & & & & & & \vdots & \dots & \dots \\ & & \underline{0} & & & & \vdots & \lambda_6 & \\ & & & & & & \vdots & & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_1 t} & \vdots & & & \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \vdots & & & \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \\ & & & \vdots & e^{\lambda_4 t} & te^{\lambda_4 t} & \vdots \\ & & & \vdots & 0 & e^{\lambda_4 t} & \vdots \\ & & & & \dots & \dots & \vdots \\ & & \underline{0} & & & & \vdots & \dots & \dots \\ & & & & & & \vdots & e^{\lambda_6 t} & 0 \\ & & & & & & \vdots & 0 & e^{\lambda_7 t} \end{bmatrix}$$

τότε:

$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$ όπου e^{Jt} ο διπλανός πίνακας και S ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα και τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A .

ΈΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

3η μέθοδος (Μέθοδος ιδιοτιμών)

Στο παράδειγμα της δεύτερης μεθόδου: ακολουθώντας την 3η μέθοδο, έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Και οι δύο ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ είναι διακριτές
Βρίσκουμε την $Ax_1 = \lambda_1 x_1 \Rightarrow (\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{11} + x_{12} = 0 \Rightarrow x_{11} = -x_{12}. \quad \text{Έστω } x_{12} = 1 \quad \text{τότε } x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ομοίως: } Ax_2 = \lambda_2 x_2 \Rightarrow (\lambda_2 I - A)x_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_{22} + 2x_{21} = 0 \Rightarrow x_{22} = -2x_{21} \Rightarrow \text{αν } x_{21} = 1 \text{ και } x_{22} = -2$$

$$\text{τότε } x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{Σχηματίζουμε τον πίνακα } M = [x_1 | x_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ΈΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ... (ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ)

$$M = [x_1 | x_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Πιστοποιούμε ότι $\det M = 1 \neq 0$

$$\text{και } M^{-1} = \frac{\text{Adj}M}{\det M} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Οπότε:
$$e^{At} = M e^{A_d t} M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

4η μέθοδος (Μέθοδος Cayley-Hamilton)

Το θεώρημα Cayley-Hamilton λέει ότι ο πίνακας A ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλαδή αν $S^n + \alpha_1 S^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$ η χαρακτηριστική εξίσωση του A τότε:
 $A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_n I = 0.$

Τούτο σημαίνει ότι κάθε πίνακας A^k με $k \geq n$ μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει πολυωνύμων πινάκων που περιέχουν δυνάμεις του A έως και $n-1$ τάξης.

Κατά συνέπεια:

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(t) A^i$$

όπου $C_i(t)$, $i=0,1,\dots,n-1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις του χρόνου.

Επειδή οι πίνακες A και J συνδέονται με τον μετασχηματισμό ομοιότητας $A = SJS^{-1}$

Αυτοί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και επομένως στις συναρτήσεις $\exp(At)$, $\exp(Jt)$ τα ίδια $C_i(t)$, δηλαδή:

$$\exp(Jt) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(t) J^i$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Έχουμε ήδη αναφέρει τη μορφή που έχει ο $\exp(Jt)$. Για την μορφή του J^k δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε το $f(J) = J^k$ ακολουθώντας τη μορφή που έχει ο $f(J)$.

Έχουμε: $J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \frac{\kappa \lambda^{\kappa-1}}{1!} & \frac{\kappa(\kappa-1)\lambda^{\kappa-2}}{2!} & \dots \\ 0 & \lambda^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\kappa \lambda^{\kappa-1}}{1!} \\ & & & & \lambda^k \end{bmatrix} \quad (n \times n)$

Έχοντας τις μορφές του J^i με $J^0 = I$ και του $\exp(Jt)$ λύνουμε το σύστημα με την εξίσωση για τον υπολογισμό του $C_i(t)$.

Έχουμε: $-\alpha_n I = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\alpha_n A^{-1} = A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n} [A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} I]$$

(υπολογισμός) του A^{-1} (μπορεί να υλοποιηθεί σε Η/Υ)

Ομοίως: $A^n = -[\alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I] \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{n+1} = -[\alpha_1 A^n + \alpha_2 A^{n-1} + \dots + \alpha_n A] =$$

$$= -(\alpha_1 (\alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I) + \alpha_2 A^{n-1} + \dots + \alpha_n A) \quad \text{κ.λ.π.}$$

$\forall \kappa > n$ A^κ υπολογίζεται συναρτήσει δυνάμεων του A^i όπου $i=0 \dots n-1$.

ΈΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ...

Παράδειγμα: (4η μέθοδος) Να υπολογισθεί ο e^{A^T} όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Ο πίνακας A είναι ήδη σε μορφή Jordan.
Αν δεν ήταν θα ακολουθούσαμε την παρακάτω
ανάλυση για να βρούμε τη μορφή Jordan.)

Ο πίνακας A έχει την διπλή ιδιοτιμή $\lambda=+1$. Άρα $n=2$, $m=2$.

$$p(B) = 1$$

$$v_1 = n - p = 1$$

$$B = (A - \lambda I) = (A - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα υπάρχει ένας μόνο υποπίνακας

J που συνδέεται με την $\lambda = 1$ και είναι
διάστασης 2.

Το ίδιο (δηλαδή η διάστασή του) πιστοποιείται και από το ότι:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} p = 0 = n - m \\ v_2 = n - p = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{άρα εδώ σταματάμε} \\ \text{και } v_2 - v_1 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{άρα εδώ υπάρχει ιδιοδιάνυσμα} \\ \text{που ανήκει στο } N_2 \text{ αλλά όχι στο } N_1. \\ \text{Από αυτό γεννιέται αλυσίδα μήκους 2.} \end{array}$$

Επίσης $v_1 - v_0 = 1 - 0 = 1$. Άρα υπάρχει N_1 το οποίο
όμως έχει ήδη προσδιορισθεί από το
προηγούμενο βήμα.

Επομένως: $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ένα παράδειγμα ... μέθοδος Cayley Hamilton

Άρα ο e^{At} έχει ίδια C_i με τον e^{Jt} και $e^{Jt} = C_0 I + C_1 J$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 + C_1 & C_1 \\ 0 & C_0 + C_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} e^t &= C_0 + C_1 \\ te^t &= C_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= te^t \\ C_0 &= e^t - te^t \end{aligned}$$

κατά συνέπεια:

$$e^{At} = C_0 I + C_1 A = \begin{bmatrix} e^t - te^t & 0 \\ 0 & e^t - te^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^t & te^t \\ 0 & te^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Στην περίπτωση που ο A έχει διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, τότε $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ και έχουμε:

$$\exp(\lambda_\kappa t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(t) \lambda_\kappa^i \quad \kappa = 1, 2, \dots, n$$

οι παραπάνω η εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των $C_i(t)$ και μπορούν να γραφούν με τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_{n-1}(t) \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \text{όπου } V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{πίνακας Van de Moore}$$

Έστω τώρα το παράδειγμα της μεθόδου 1 Έχουμε: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ και $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

Οπότε: $V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ και $V^{-1} = -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ Οπότε: $\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_0 = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ C_1 = e^{-t} - e^{-2t} \end{matrix}$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } \exp(At) &= C_0 I + C_1 A = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$