Ηλεκτρικές Μετρήσεις

Ενότητα 3η

Στατιστική επεξεργασία των δεδομένων μέτρησης - Αβεβαιότητα μέτρησης

Μέτρηση

- Αντικειμενικός σκοπός μιας **μέτρησης** είναι να προσδιορίσει την **τιμή** της **μετρούμενης ποσότητας**

- Μια μέτρηση ξεκινά με τον κατάλληλο προσδιορισμό

1. της μετρούμενης ποσότητας,
2. της **μεθόδου της μέτρησης** και
3. της **διαδικασίας μέτρησης**.

μέτρησης	measurement
τιμή	value
μετρούμενη ποσότητα	measurand
Μέθοδος μέτρησης	method of measurement
διαδικασία μέτρησης	measurement procedure

Μέτρηση

- Το **αποτέλεσμα μιας μέτρησης** δεν είναι παρά μια προσέγγιση ή **εκτίμηση** της τιμής της μετρούμενης ποσότητας

  επομένως,

  θεωρείται πλήρες μόνον όταν συνοδεύεται από την **αβεβαιότητα** αυτής της εκτίμησης.

αποτέλεσμα μιας μέτρησης	result of a measurement
εκτίμηση	estimate
αβεβαιότητα	uncertainty

Σημείωση 1

Όταν δίνεται ένα αποτέλεσμα μέτρησης, πρέπει να διευκρινίζεται αν πρόκειται:

- για την ένδειξη (του οργάνου)
- το αποτέλεσμα χωρίς διόρθωση (uncorrected result) ή
- το διορθωμένο αποτέλεσμα (corrected result)

και αν πρόκειται για τη μέση τιμή πολλών τιμών.

Σημείωση 2

Η παράθεση του αποτελέσματος μιας μέτρησης θεωρείται πλήρης αν περιλαμβάνει και πληροφορία σχετικά με την αβεβαιότητα της μέτρησης

$$x \pm u_x$$

- Στην πράξη, ο καθορισμός της μετρούμενης ποσότητας υπαγορεύεται από τη ζητούμενη **ακρίβεια της μέτρησης** (accuracy of measurement).

Παράδειγμα 1

Αν είναι να μετρηθεί με ακρίβεια μικρομέτρου (μm) το μήκος μιας ράβδου, ονομαστικής τιμής μήκους ενός μέτρου ($l = 1.00m$), η προδιαγραφή της μέτρησης πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον

(α) τη θερμοκρασία και

(β) την πίεση

στις οποίες γίνεται η μέτρηση.

Έτσι, η μετρούμενη ποσότητα πρέπει να ορίζεται, για παράδειγμα, σαν

“ *το μήκος της ράβδου στους* $25.00℃*$ *και* $101\ 325\ Pa$ “

(πλέον όποιας άλλης παραμέτρου θεωρείται απαραίτητη, π.χ., τρόπος στήριξης της ράβδου).

Σφάλματα μέτρησης και διορθώσεις

- Γενικά, κάθε μέτρηση έχει ατέλειες που οδηγούν σε **σφάλμα** αποτελέσματος.

- Παραδοσιακά, κάθε σφάλμα θεωρείται ότι έχει δύο συνιστώσες:

    1. την **τυχαία** και

    2. τη **συστηματική** συνιστώσα.

σφάλμα	error
τυχαίο σφάλμα	random error
συστηματικό σφάλμα	systematic error

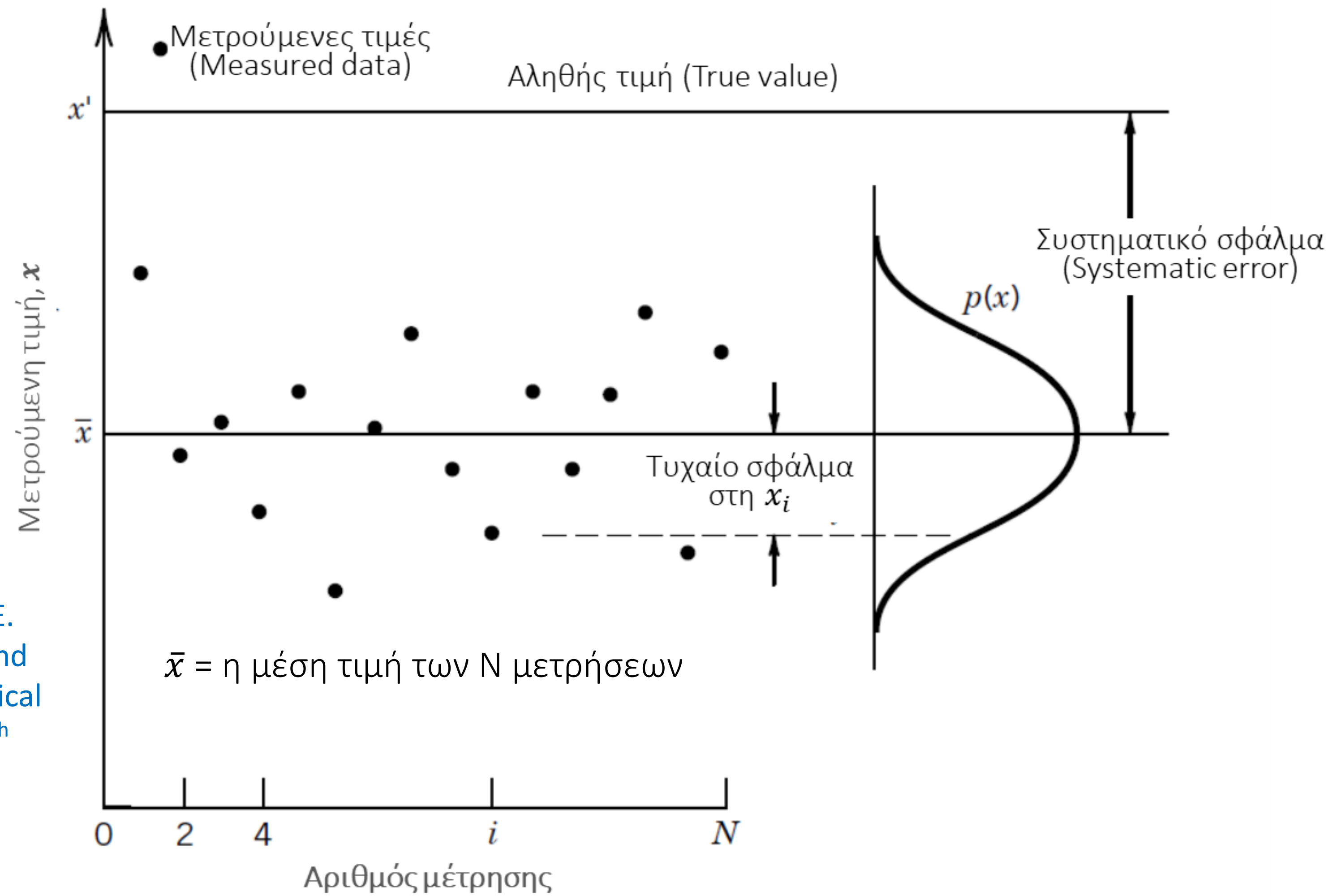
Τυχαία σφάλματα

- Προκύπτουν κυρίως από απρόβλεπτες (τυχαίες, στοχαστικές) χρονικές και χωρικές διακυμάνσεις των μεγεθών που επηρεάζουν τη μετρούμενη ποσότητα (influence quantities).
- Αποτέλεσμα: Διακυμάνσεις (variarions) σε διαδοχικές παρατηρήσεις της μετρούμενης ποσότητας.

Παραδείγματα τυχαίων σφαλμάτων κατά τη μέτρηση τάσης

- Θερμικός θόρυβος (θόρυβος Johnson) $V = \sqrt{4kTfR}$
  - V η rms τιμή του θορύβου
  - k = Σταθερά Boltzmann
  - T = Απόλυτη θερμοκρασία
  - R = Αντίσταση σε Ohm
  - f = Noise Bandwidth (Hz)
- Θόρυβος (ηλεκτρονικός) οργάνου μέτρησης

Κατανομή των σφαλμάτων σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις



R.S. Figliola and D.E. Beasley, “Theory and Design for Mechanical Measurements”, 5th ed., WILEY

Το τυχαίο σφάλμα $\Delta x = x - \bar{x}$ ακολουθεί κατανομή Gauss, $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}$

Συστηματικά σφάλματα

- Έχουν συγκεκριμένο σταθερό πρόσημο και σταθερή τιμή (offset).
- Οφείλονται σε ατελή (μη ορθή) διαδικασία μέτρησης.

Σημείωση

Αν ένα συστηματικό σφάλμα οφείλεται σε γνωστό παράγοντα (*συστηματική επίδραση* - systematic effect), που μπορεί να ποσοτικοποιηθεί (υπολογιστεί), μπορεί να εφαρμοστεί **διόρθωση** (correction) ή **συντελεστής διόρθωσης** (correction factor) για την αντιστάθμιση.

- Υποτίθεται ότι, μετα τη διόρθωση, η προσδοκώμενη τιμή του συστηματικού σφάλματος είναι μηδέν.

Αβεβαιότητα

- Αβεβαιότητα ορίζεται ως μια περιοχή τιμών, γύρω από τη μετρούμενη τιμή, στην οποία εκτιμάμε ότι περιέχεται η πραγματική τιμή.

- Στην πράξη, απαιτούνται δύο αριθμοί προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί μια αβεβαιότητα:
  – το εύρος της περιοχής τιμών ή **διάστημα εμπιστοσύνης**
  – το **επίπεδο εμπιστοσύνης**: η πιθανότητα που εκτιμάμε ότι η «πραγματική τιμή» είναι μέσα σε αυτό το διάστημα.

διάστημα εμπιστοσύνης	confidence interval
επίπεδο εμπιστοσύνης	confidence level

Παράδειγμα

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το μήκος μιας συγκεκριμένης ράβδου μετρήθηκε 20 εκατοστά συν ή πλην 1 εκατοστό με διάστημα εμπιστοσύνης 95%. Αυτό το αποτέλεσμα γράφεται

20 cm ± 1 cm, με διάστημα εμπιστοσύνης 95%

GUM - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: Διεθνείς οδηγίες για θέματα ορισμών, υπολογισμού και έκφρασης της αβεβαιότητας μετρήσεων

Διεθνές Γραφείο Μέτρων & Σταθμών (BIPM)
https://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html

National Institute for Standards and Technology – NIST (USA)
https://www.nist.gov/pml/nist-technical-note-1297

"A Beginner's Guide to Uncertainty of Measurement", Stephanie Bell
National Physics Laboratory – NPL (UK)

Applying Measurement Uncertainty To Digital Multimeter Calibration: An introductory study of measurement uncertainty and its application to digital multimeter calibration
https://us.flukecal.com/literature/articles-and-education/applying-measurement-uncertainty-dmm-and-clamp-meter-calibration-m
FLUKE

Τύποι αβεβαιότητας*

- Τύπου Α
  - Οφείλεται σε τυχαία σφάλματα
  - Μπορεί να εκτιμηθεί στατιστικά από το σύνολο των δεδομένων μέτρησης (Συχνά θεωρείται τυχαία αβεβαιότητα)

Παράδειγμα: η επαναληψιμότητα της μέτρησης (επηρεάζεται από τα χαρακτηριστικά του οργάνου, σταθερότητα σήματος, θόρυβο, κ.λπ.)

- Τύπου Β
  - Οφείλεται σε συστηματικά σφάλματα που δεν παρατηρούνται άμεσα από τα δεδομένα μέτρησης (Συχνά θεωρούνται συστηματική αβεβαιότητα)

Παράδειγμα: Προδιαγραφές ακρίβειας οργάνου μέτρησης, μεταβολές με την πάροδο του χρόνου ή με τις συνθήκες, όρια ευαισθησίας του οργάνου μέτρησης

*Σύμφωνα με GUM

Υπολογισμός αβεβαιότητας τύπου Α - Στατιστική ανάλυση μιας σειράς μετρήσεων

- Η αβεβαιότητα τύπου Α προσδιορίζεται από τη **στατιστική ανάλυση** μιας σειράς παρατηρήσεων (μετρήσεων).
- Οι αβεβαιότητες τύπου Α περιλαμβάνουν την επίδραση από:
  - διακύμανση πολλαπλών επαναλαμβανόμενων ενδείξεων από το σύστημα που μετριέται
  - το θόρυβο του συστήματος

Στατιστική ανάλυση παρατηρήσεων – **Η μέση τιμή**

- **Αριθμητικός μέσος** ή **μέση τιμή** (arithmetic mean or average), $\bar{X}$, N ανεξάρτητων τιμών X_k μιας ποσότητας X που έχουν ληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$

- Αποτελεί τη βέλτιστη δυνατή εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής μ_X της ποσότητας X που **μεταβάλλεται τυχαία** (**random variable**)

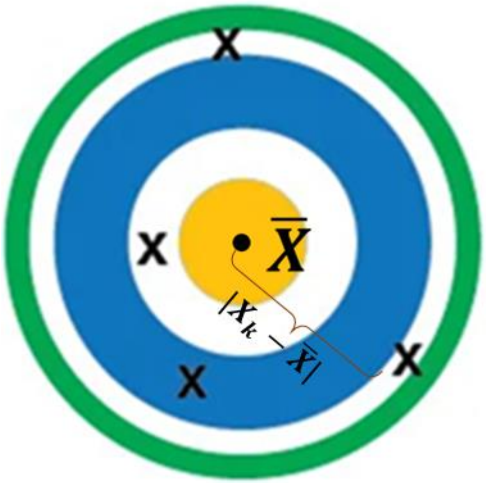
Παρατήρηση

- Σαν εμπειρικός κανόνας, λήψη μεταξύ 4 και 10 μετρήσεων είναι αρκετή.
- Προσπάθεια βελτίωσης (μείωσης) της αβεβαιότητας για περισσότερους από 10 μετρήσεις έχει περιορισμένα αποτελέσματα

Στατιστική ανάλυση παρατηρήσεων – **Τυπική απόκλιση**

- Η πειραματική **τυπική απόκλιση** (experimental standard deviation) ή τυπική απόκλιση μιας σειρά N δειγμάτων (Sample Standard Deviation), συμβολίζεται με $\boldsymbol{s}$ ή $\boldsymbol{\sigma}$ ή $\boldsymbol{\sigma_{n-1}}$

$$s = \sigma = \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(X_k - \bar{X})^2}$$



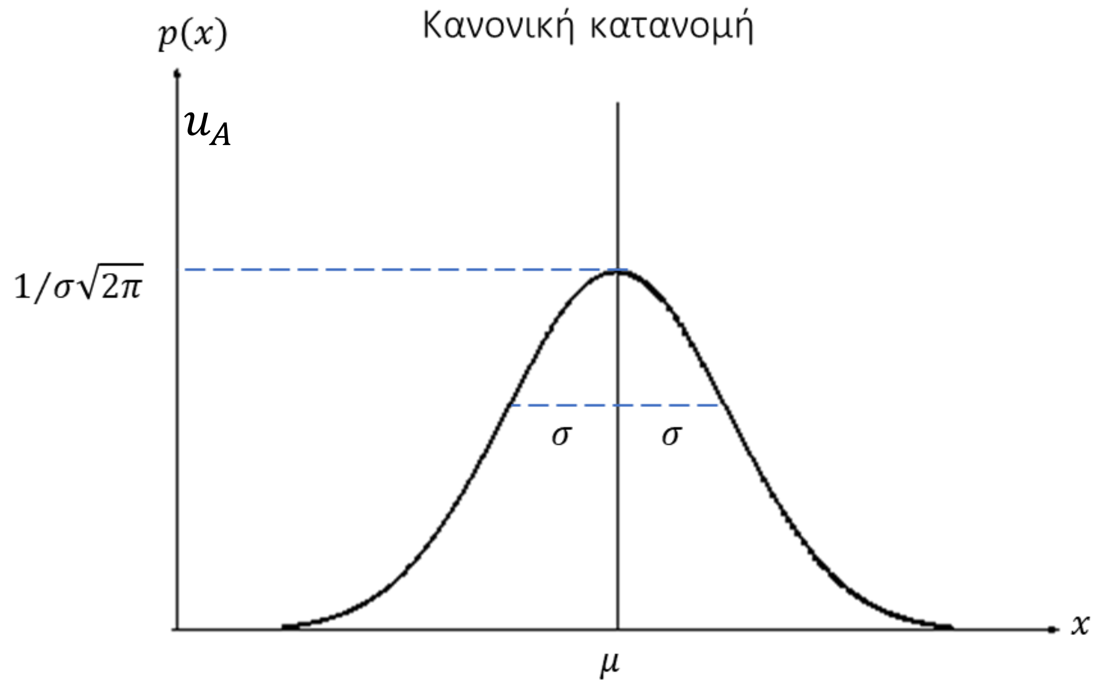
Κανονική κατανομή

- **Κανονική κατανομή** ή **κατανομή Gauss**: εκφράζει την πιθανότητα των τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής x

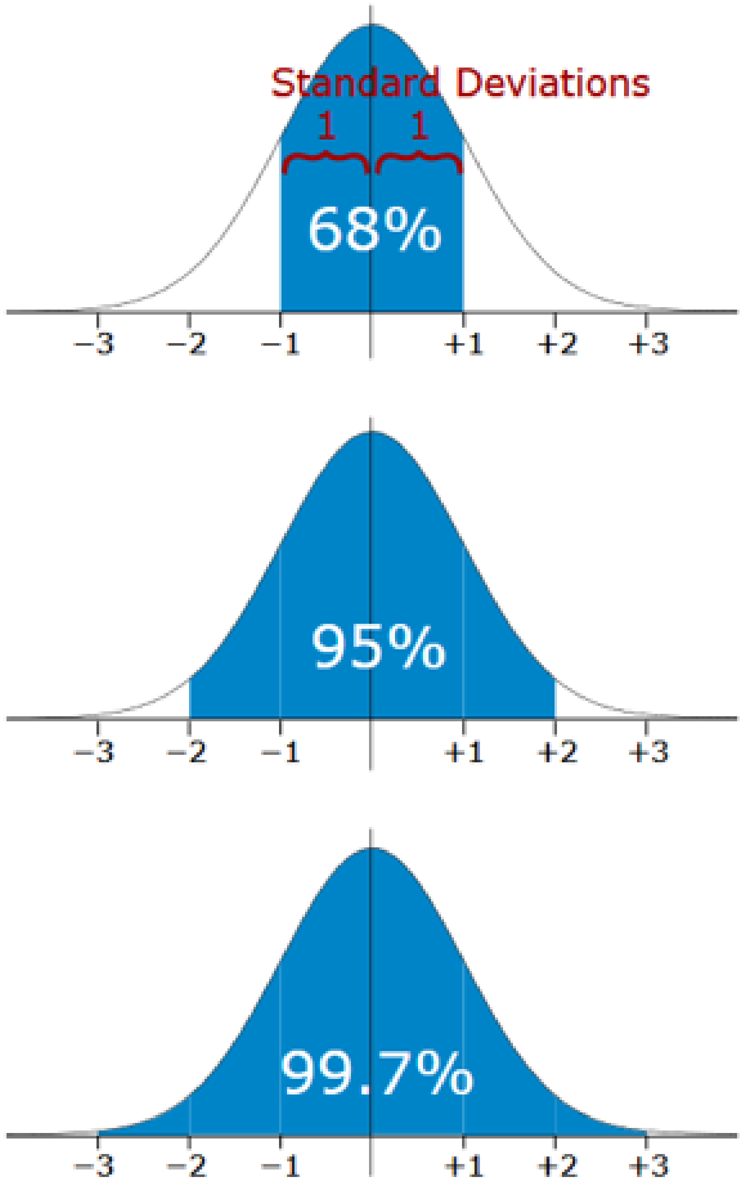
- Χαρακτηρίζει την κατανομή στατιστικά ανεξάρτητων μετρήσεων ενός μεγέθους γύρω από τη μέση τιμή του.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  - $p(x)$ η πιθανότητα της τιμής x
  - μ η μέση τιμή
  - σ η τυπική απόκλιση



Η τυπική απόκλιση είναι ένα μέτρο του πόσο διάσπαρτες είναι οι μετρήσεις γύρω από τη μέση τιμή



68% of values are within
1 standard deviation of the mean

95% of values are within
2 standard deviations of the mean

99.7% of values are within
3 standard deviations of the mean

Αβεβαιότητα τύπου Α

- Για ένα κανονικά κατανεμημένο πλήθος τιμών (συνήθης περίπτωση), η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής (standard deviation of the mean)

$$u_A = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}(X_k - \bar{X})^2}$$

αποτελεί τη βέλτιστη εκτίμηση της αβεβαιότητας και αναφέρεται ως **τυπική αβεβαιότητα τύπου Α** για το μετρούμενο μέγεθος X

Τυπική και εκτεταμένη αβεβαιότητα

- Η **τυπική αβεβαιότητα** (standard uncertainty), $\boldsymbol{u}$, αναφέρεται στο 67% των μετρήσεων.

- Η **εκτεταμένη αβεβαιότητα** (expanded uncertainty), $\boldsymbol{U}$, επεκτείνεται πολλαπλασιάζοντας την τυπική αβεβαιότητα u με τον **παράγοντα κάλυψης** (coverage factor) $\boldsymbol{k}$,

$$U = k \cdot u, \qquad k = 1, 2, 3$$

- Έτσι, θεωρώντας κανονική κατανομή της πιθανότητας των τιμών των μετρήσεων (γύρω από τη μέση τιμή)
  - Αβεβαιότητα $U = 2u$ σημαίνει ότι το 95% των μετρήσεων είναι στο διάστημα αυτό ($\pm 2u$)
  - Αβεβαιότητα $U = 3u$ αναφέρεται στο 99.7% των μετρήσεων

Παράδειγμα 2: υπολογισμός τυπικής αβεβαιότητας τύπου Α

Στον πίνακα δίνονται οι τιμές n=20 διαδοχικών παρατηρήσεων (μετρήσεων) t_k της θερμοκρασίας t

Οι $n = 20$ τιμές της θερμοκρασίας είναι ομαδοποιημένες σε διαστήματα πλάτους 1℃.

Ο αριθμητικός μέσος $\bar{t}$ των $n = 20$ παρατηρήσεων, υπολογισμένος σύμφωνα με την εξίσωση

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k$$

είναι

$$\bar{t} = 100.145℃ \approx 100.15℃$$

Interval $t_1 \leqslant t < t_2$		Temperature
t_1/°C	t_2/°C	t/°C
94,5	95,5	—
95,5	96,5	—
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	—
104,5	105,5	—

Ο μέσος $\bar{t}$ είναι η βέλτιστη εκτίμηση της προσδοκώμενης τιμής της θερμοκρασίας με βάση τα συγκεκριμένα 20 διαθέσιμα δεδομένα.

Παράδειγμα (*συνέχεια*)

Η πειραματική τυπική απόκλιση (experimental standard deviation) s, όπως υπολογίζεται από την εξίσωση

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2}$$

είναι $s = 1.513℃$

Οπότε, η τυπική αβεβαιότητα u_A του μέσου $\bar{t}$, δηλαδή, η αβεβαιότητα λόγω της διακύμανσης των μετρημένων τιμών (τύπου Α), είναι

$$u_A = \frac{s}{\sqrt{20}} = 0.333℃ \approx 0.33℃$$

Συμπέρασμα: Η θερμοκρασία με βάση το σετ των 20 μετρήσεων είναι

$$(100.15 \pm 0.33)℃$$

Υπολογισμός αβεβαιότητας τύπου Β

- Είναι κάθε άλλη αβεβαιότητα που δεν μπορεί να εκτιμηθεί με στατιστική επεξεργασία, όπως
  – Ανακρίβεια ή σφάλμα του (των) οργάνου (οργάνων) μέτρησης
  – Σφάλματα λόγω περιορισμένης ευαισθησίας του (των) οργάνου (οργάνων)
  – Επιδράσεις των αγωγών συνδέσεων (ΗΜ παρεμβολές, κακές κολλήσεις κα επαφές), θερμικές ΗΕΔ, φαινόμενα φόρτισης και κάθε άλλο πιθανό σφάλμα μέτρησης
- Η εκτίμηση γίνεται με επιστημονική κρίση και βελτιώνεται με την εμπειρία

Η εκτίμηση της τυπικής αβεβαιότητας τύπου Β

Βασίζεται σε:

- **προδιαγραφές του κατασκευαστή** (manufacturer's specifications),
- δεδομένα προηγούμενης μέτρησης,
- προηγούμενη εμπειρία ή γενική γνώση της συμπεριφοράς και των ιδιοτήτων του σχετικού υλικού και των οργάνων,
- δεδομένα από βαθμονόμηση ή άλλα πιστοποιητικά,

Αβεβαιότητα τύπου Β βασισμένη στις προδιαγραφές των οργάνων μέτρησης

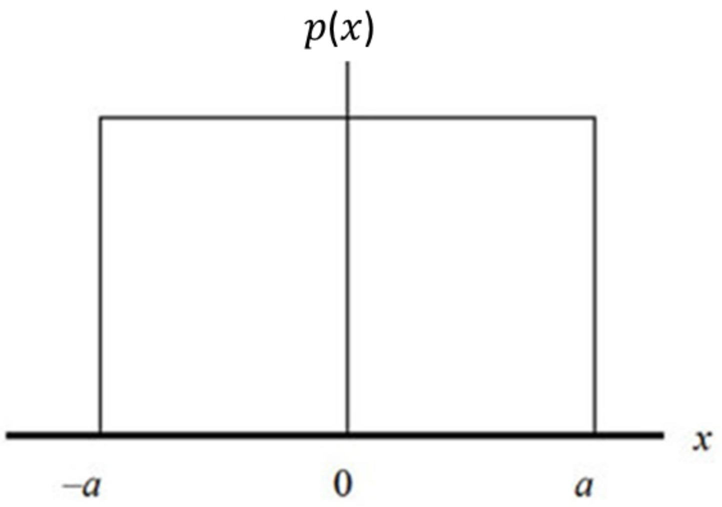
- Έστω, (α_-, α_+) η κλίμακα τιμών (range) στην οποία είναι ρυθμισμένο το όργανο

  Π.χ., κατά τη μέτρηση τάσης με βολτόμετρο ρυθμισμένο στην κλίμακα των 100mV, $(\alpha_-, \alpha_+) = (-100\mathrm{mV}, 100\mathrm{mV})$

- Αυτό, πρακτικά, σημαίνει ότι η πιθανότητα η τιμή V της τάσης να είναι εντός αυτού του διαστήματος είναι ίση με μονάδα και μηδέν οπουδήποτε εκτός

- Επιπλέον, αν δεν ορίζεται διαφορετικά, θεωρούμε ότι όλες οι τιμές τάσης στο διάστημα $(-100\mathrm{mV}, 100\mathrm{mV})$ είναι ισοπίθανες, δηλαδή, υποθέτουμε **ομοιόμορφη** (uniform) ή **ορθογώνια** (rectangular) κατανομή πιθανών τιμών.

Ομοιόμορφη ή ορθογώνια κατανομή – Υπολογισμός τυπικής αβεβαιότητας τύπου Β



$$p(x) = \begin{cases} 1/2\alpha, & -\alpha \le x \le \alpha \\ 0, & x \le -\alpha, x \ge \alpha \end{cases}$$

Δεδομένου ότι η αναμενόμενη τιμή του μεγέθους X είναι το μέσο του διαστήματος

$$\bar{X} = \int_{-\alpha}^{\alpha} x \cdot p(x) \cdot dx = 0$$

με αντίστοιχη διακύμανση (variance)

$$\sigma^2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p(x) dx = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{3}$$

η **τυπική αβεβαιότητα** (αβεβαιότητα τύπου Β) είναι

$$u_B = \sigma = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

Παράδειγμα 3: Υπολογισμός τυπικής αβεβαιότητας τύπου Β

Οι προδιαγραφές κατασκευαστή για ένα ψηφιακό βολτόμετρου δηλώνουν ότι "*η ακρίβειά του στην κλίμακα (range) του 1 V είναι* ***14 × 10⁻⁶ of reading + 2 × 10⁻⁶ of range***".

Θεωρήστε ότι το όργανο χρησιμοποιείται για μια σειρά n (π.χ., $n = 10$) ανεξάρτητων μετρήσεων της τάσης σε αυτή την κλίμακα. Η στατιστική επεξεργασία των τιμών των n μετρήσεων έδωσε

- αριθμητικό μέσο $\bar{V} = 0.9280571\ V$ και
- διακύμανση τιμών που οδήγησε σε τυπική αβεβαιότητα τύπου Α, $u_A(\bar{V}) = 12\ \mu V$.

Να εκτιμηθεί η αβεβαιότητα στο παραπάνω αποτέλεσμα της τιμής της μέτρησης που σχετίζεται με την ακρίβεια του οργάνου (αβεβαιότητα τύπου Β).

(συνεχίζεται . . .)

Απάντηση

Βήμα 1: Υπολογίζουμε το μέγιστο σφάλμα του οργάνου σύμφωνα με τις προδιαγραφές κατασκευαστή για τη συγκεκριμένη μέτρηση

$$(14 \times 10^{-6}) \text{ of reading} + (2 \times 10^{-6}) \text{ of range}$$

$$= (14 \times 10^{-6}) \times (0.928\,571\ V) + (2 \times 10^{-6}) \times (1\ V)$$

$$= 15\ \mu V$$

Δηλαδή, το σφάλμα στη μέτρηση **λόγω των περιορισμών στις προδιαγραφές του οργάνου (σφάλμα οργάνου)** μπορεί να είναι σε ένα διάστημα $\pm 15\ \mu V$ γύρω από την πιθανότερη τιμή ($\bar{V} = 0.928571\ V$)

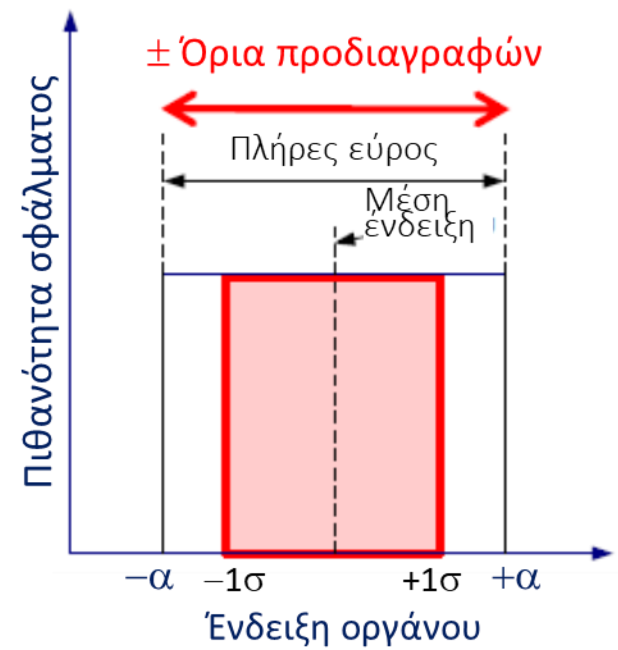
(συνεχίζεται . . .)

Βήμα 2: Μετατρέπουμε το προσδιορισμένο σφάλμα σε μια τιμή σφάλματος που καλύπτει το διάστημα της τυπικής απόκλισης (±1σ)

Εάν δεν παρέχονται άλλες πληροφορίες από τον κατασκευαστή, υποθέτουμε μια ορθογώνια κατανομή της πιθανότητας σφάλματος, Εικ. (α).

Επομένως, η αντίστοιχη αβεβαιότητα (τύπου Β) είναι

$$u_B = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{15\ \mu V}{\sqrt{3}} = 8.7 \mu V$$



(α)

Αβεβαιότητα λόγω διακριτικής ικανότητας οργάνου

- Ακόμη και αν όλα τα σφάλματα είναι μηδενικά, η ακρίβεια μιας τιμής μέτρησης επηρεάζεται από την διακριτική ικανότητα (resolution) του οργάνου.
- Αυτή η μηδενικής τάξεως αβεβαιότητα (zero-order uncertainty), u_0, ουσιαστικά είναι μια εκτίμηση της αβεβαιότητας που οφείλεται στη διακύμανση ±1 της τιμής του τελευταίου (LSD*) ψηφίου του οργάνου.

Παράδειγμα: στην εικόνα, η πραγματική μετρούμενη τιμή μπορεί να είναι οιαδήποτε στο διάστημα μεταξύ 0.3845 – 0.3854 = 0.001 = LSD

Θεωρώντας ορθογώνια κατανομή πιθανότητας, η αβεβαιότητα αυτή είναι (γιατί;)

$$u_0 = \frac{1}{2} \times \mathrm{LSD}/\sqrt{3}$$

*LSD = Least Significant Digit (το λιγότερο σημαντικό ψηφίο).

Παράδειγμα 4

Η μηδενικής τάξεως αβεβαιότητα για DMM 3½ ψηφίων στην κλίμακα 2A (βλ. εικόνα) είναι

$$u_0 = \frac{1}{2} \times (0.001\ \mathrm{A})/\sqrt{3}$$

$$u_0 \cong 0.0003\ \mathrm{A}$$

Παράδειγμα 5

Θεωρήστε ένα όργανο μέτρησης της δύναμης με τις παρακάτω προδιαγραφές:

- Range: 0 to 100 N
- Resolution: 0.25 N

Δώστε μια εκτίμηση της αβεβαιότητας μηδενικής τάξεως, u_0, που οφείλεται στην ανάλυση του οργάνου.

Απάντηση

$$u_0 = \frac{1}{2} \times \mathrm{Resoluton}/\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times (0.25\ \mathrm{N})/\sqrt{3}$$

$$= 0.07\ \mathrm{N}$$

Συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα

- Η **συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα** (combined standard uncertainty), u_c, είναι η ρίζα του τετραγωνικού αθροίσματος (RSS, Root Sum Square) όλων των συνεισφορών **τυπικής** αβεβαιότητας.

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

όπου,

$u_1, u_2 \ldots u_n$ είναι όλοι οι παράγοντες τυπικής αβεβαιότητας **τύπου Α** ή **Β** της μετρούμενης ποσότητας

Μέθοδοι συνδυασμού αβεβαιοτήτων

- Σύμφωνα με τα διεθνή πρότυπα (ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) οι αβεβαιότητες συνδυάζονται με RSS

- Σε κάθε περίπτωση, είναι ουσιώδες όλες οι συνδυαζόμενες αβεβαιότητες να είναι εκφρασμένες στο ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης (π.χ., 67%, 95%, κ.λπ.)

- Για να υπολογίσουμε τη συνολική αβεβαιότητα σε μεγαλύτερο επίπεδο εμπιστοσύνης, η τυπική συνδυασμένη αβεβαιότητα πολλαπλασιάζεται επί τον κατάλληλο παράγοντα κάλυψης k, ($k = 2, 3, \ldots$)

$$U_C = k u_c = k\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Παράδειγμα 6

Θεωρήστε ότι, για το όργανο μέτρησης της δύναμης του παραδείγματος 5, ο κατασκευαστής παρέχει, εκτός από την ανάλυση, προδιαγραφές και για τα σφάλματα γραμμικότητας και υστέρησης ως εξής:

- Range: 0 to 100 N
- Resolution: 0.25 N
- Linearity error (at 95% level): within 0.20 N over range
- Hysteresis error (at 95% level): within 0.30 N over range

Εκτιμήστε τη συνδυασμένη αβεβαιότητα, u_c, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% που οφείλεται σε όλους του παραπάνω παράγοντες σφάλματος του οργάνου.

Απάντηση

$$u_c = \sqrt{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2}$$

όπου, u_0, u_1και u_2 συμβολίζουν τους παράγοντες αβεβαιότητας λόγω ανάλυσης του οργάνου (αβεβαιότητα μηδενικής τάξης), σφάλματος γραμμικότητας και σφάλματος υστέρησης, αντίστοιχα.

Απάντηση (συνέχεια)

Οι τιμές και τα επίπεδα εμπιστοσύνης για τους παράγοντες αβεβαιότητας είναι

$$u_0 = 0.07 \text{ N} @ 67\%$$

$$u_1 = 0.20 \text{ N} @ 95\%$$

$$u_2 = 0.30 \text{ N} @ 95\%$$

Επομένως,

$$u_c = \sqrt{(2 \times 0.07)^2 + (0.20)^2 + (0.30)^2}$$

$$\boldsymbol{u_c \cong 0.75\ \mathbf{N}}$$

Παράδειγμα 7

Εκτιμήστε τη συνδυασμένη (ολική)αβεβαιότητα της μέτρησης στο Πδγμ. 3

Απάντηση

Δεδομένου ότι

(α) η αβεβαιότης τύπου Α της μέτρησης, που προέκυψε $12\ \mu V$, αναφέρεται, από τον τρόπο υπολογισμού της, σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης 67% (γιατί;), ενώ

(β) η αβεβαιότητα, που σχετίζεται με τις προδιαγραφές του οργάνου (τύπου Β), υπολογίστηκε σε $8.7 \mu V$ και, κατά σύμβαση, αναφέρεται σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%

η συνολική ζητούμενη αβεβαιότητα της μέτρησης προκύπτει

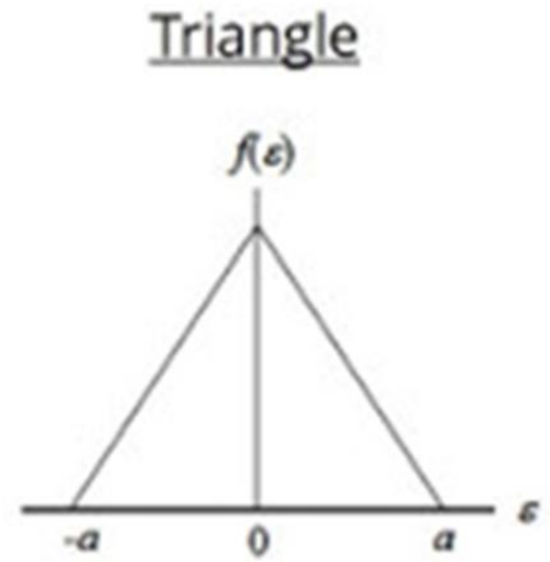
$$u_c = \sqrt{[2 \cdot u_A]^2 + u_B^2} = \sqrt{(2 \cdot 12\ \mu V)^2 + (8.7\ \mu V)^2} \cong 26\ \mu V$$

οπότε, το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι

$$\boldsymbol{\bar{V} \pm u_c = 0.928\ 571\ V \pm 26\ \mu V}$$

Πρόβλημα 1

Εκτιμήστε την αβεβαιότητα τύπου B στη μέτρηση του παραδείγματος 3 στην περίπτωση που ο κατασκευαστής δηλώνει ότι η πιθανότητα σφάλματος του οργάνου ακολουθεί τριγωνική κατανομή, Εικ. (β)



(β)

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι

$$u^2(X) = \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f(x)dx = \frac{\alpha^2}{6}$$

Διάδοση αβεβαιότητας

Εφαρμογή: Μέτρηση αντίστασης με τη βοήθεια πηγής ρεύματος και βολτομέτρου

Διάδοση αβεβαιοτήτων

Ένα παράδειγμα

Εάν η ηλεκτρική αντίσταση R μετριέται έμμεσα με τη βοήθεια της τάσης V και του ρεύματος I, η σχέση (μαθηματικό μοντέλο της μέτρησης) είναι ο νόμος του Ohm

$$R = f(V, I) = \frac{V}{I}$$

Γενικά, σε μια διαδικασία μέτρησης της τιμής y μιας ποσότητας Y με μαθηματικό μοντέλο της μέτρησης

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

όπου, x_i οι τιμές των άμεσα μετρούμενων ποσοτήτων X_i

https://www.ukas.com/download/publications/publications-relating-to-laboratory-accreditation/M3003-Expression-of-Uncertainty-and-Confidence-in-Measurement-Edition-4-October-2019.pdf

Διάδοση αβεβαιοτήτων (συνέχεια)

Αν η τυπική αβεβαιότητα, που συνδέεται με την εκτιμώμενη τιμή κάθε μίας ποσότητας X_i, αντιπροσωπεύεται από το $u(x_i)$, τότε

η συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα της ποσότητας Y υπολογίζεται ως εξής:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2\, u^2(x_i)}$$

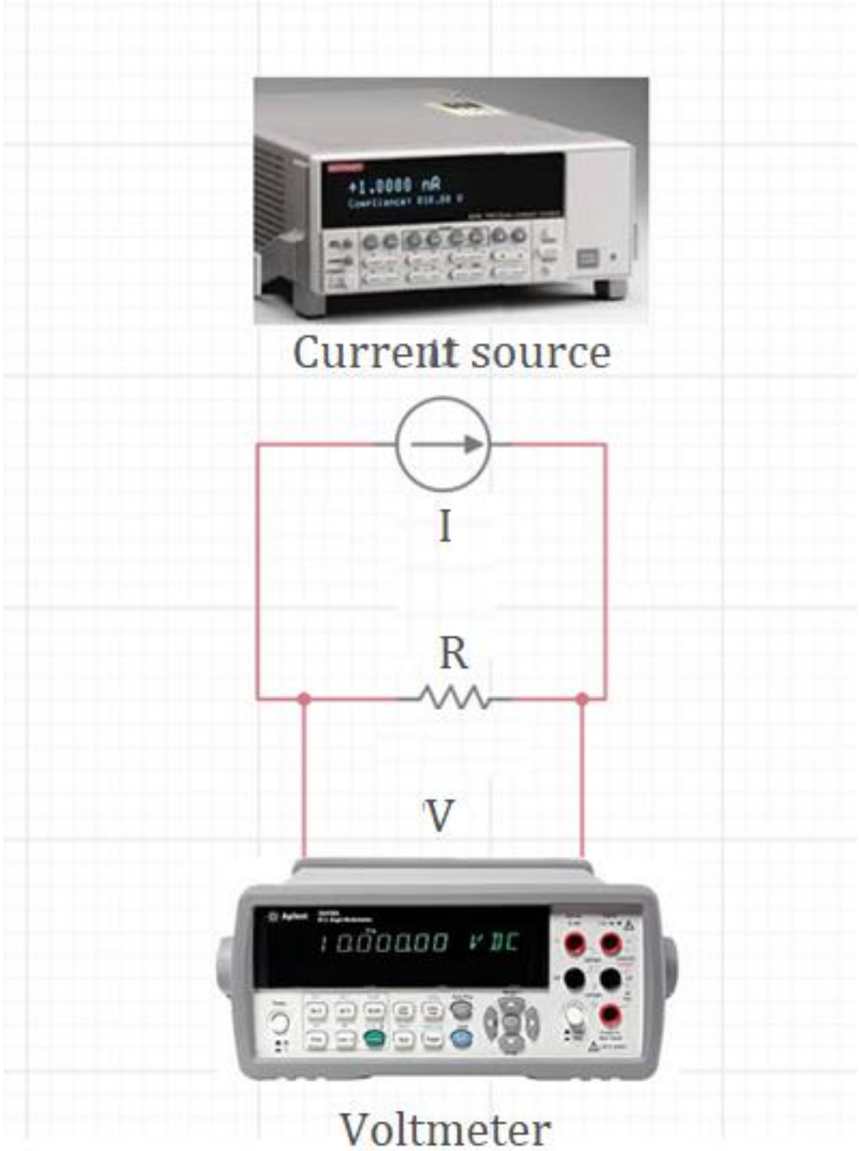
όπου

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i = x_i}$$

είναι ο συντελεστής ευαισθησίας (sensitivity coefficient) που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η υπολογιζόμενη τιμή y μεταβάλλεται με μια μικρή αλλαγή στην εκτίμηση της τιμής x_i.

Μέτρηση αντίστασης R με τη βοήθεια πηγής ρεύματος και βολτομέτρου

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ



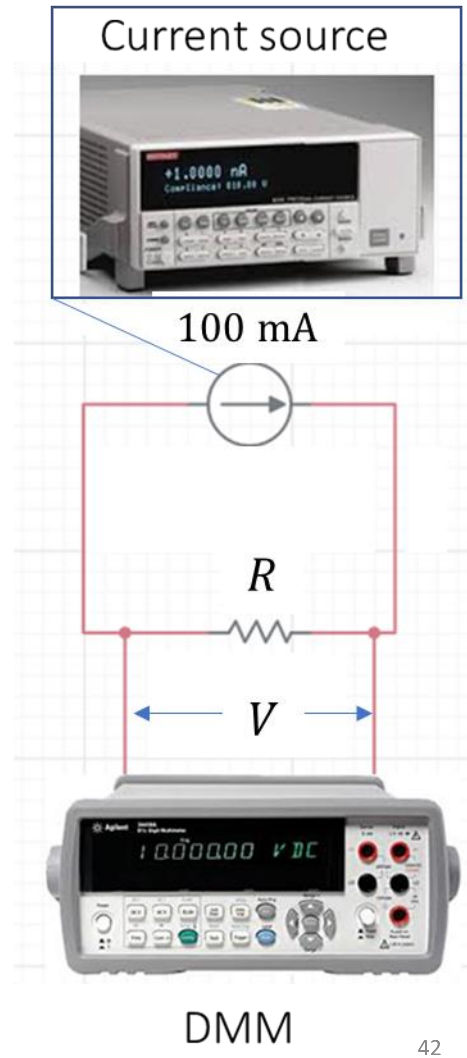
Παράδειγμα 8: Μέτρηση αντίστασης με τη βοήθεια πηγής ρεύματος και βολτομέτρου

Η dc αντίσταση R ενός στοιχείου σε ένα κύκλωμα προσδιορίζεται τροφοδοτώντας το με σταθερό ρεύμα 100 mA από μια πηγή ρεύματος (current source) και μετρώντας την τιμή της dc διαφοράς δυναμικού V στα άκρα του με ένα ψηφιακό πολύμετρο (DMM) 6½ ψηφίων και χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm, $R = V/I$.

Θεωρήστε ότι λαμβάνονται πέντε ανεξάρτητες μετρήσεις τάσης στις ίδιες συνθήκες, οδηγώντας στα δεδομένα που δίνονται στον Πίνακα παρακάτω.

Α/α μέτρησης	V (Volt)
1	5.00972
2	4.97441
3	5.00818
4	4.98827
5	4.95849

Η πειραματική διάταξη



Παράδειγμα 8 (συνέχεια)

Οι προδιαγραφές ακριβείας (accuracy specifications) για το πολύμετρο στη λειτουργία “DC Voltage” είναι

Accuracy Specifications ± (% of reading + % of range)

Function	Range[3]	1 Year Tcal ± 5 °C	Temperature Coefficient/°C 0 °C to (Tcal -5 °C) (Tcal +5 °C) to 55 °C
DC Voltage	100.0000 mV	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V	0.0035 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V	**0.0030 + 0.0005**	**0.0005 + 0.0001**
	100.0000 V	0.0040 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V[4]	0.0040 + 0.0006	0.0005 + 0.0001

Παράδειγμα 8 (συνέχεια)

Οι προδιαγραφές ακριβείας για την πηγή ρεύματος είναι

SOURCE SPECIFICATIONS

Range (+5% over range)	Accuracy (1 Year) 23°C±5°C ±(%rdg. + amps)	Programming Resolution	Temperature Coefficient/°C 0°-18°C& 28°-50°C
2nA	0.4% + 2pA	100fA	0.02% + 200fA
20nA	0.3% + 10pA	1pA	0.02% + 200fA
200nA	0.3% + 100pA	10pA	0.02% + 2pA
2µA	0.1% + 1nA	100pA	0.01% + 20pA
20µA	0.05% + 10nA	1nA	0.005% + 200pA
200µA	0.05% + 100nA	10nA	0.005% + 2nA
2mA	0.05% + 1µA	100nA	0.005% + 20nA
20mA	0.05% + 10µA	1µA	0.005% + 200nA
100mA	0.1% + 50µA	10µA	0.01% + 2µA

Παράδειγμα 8 (συνέχεια)

Δώστε μια εκτίμηση για την προσδοκώμενη τιμή της αντίστασης καθώς και την εκτιμώμενη αβεβαιότητα αυτής της τιμής.

Λύση

Α. Προσδοκώμενη τιμή

Η προσδοκώμενη τιμή της αντίστασης βρίσκεται χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm (μαθηματικό μοντέλο της μέτρησης),

$$R = \frac{\bar{V}}{I}$$

όπου,

I η dc τιμή του ρεύματος τροφοδοσίας, $I = 100\ m\text{A}$ και

$\bar{V}$ η μέση τιμή των μετρούμενων τιμών τάσης

Λύση (συνέχεια)

Από τον πίνακα τιμών των 5 ανεξάρτητων μετρήσεων της τάσης, η εκτιμώμενη τιμή της υπολογίζεται σε

A/α μέτρησης	$\boldsymbol{V}$ $(\boldsymbol{V})$
1	5.00972
2	4.97441
3	5.00818
4	4.98827
5	4.95849

$$\bar{V} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} V_k = 4.987814\, V$$

οπότε, η προσδοκώμενη τιμή της αντίστασης είναι

$$R = \frac{\bar{V}}{I} = \frac{4.987814\, V}{100\ \mathrm{m}A}$$

$$R = 49.87814\ \Omega$$

Λύση (συνέχεια)

Β. Εκτίμηση αβεβαιότητας της τιμής της αντίστασης

Β1. Η έκφραση για τη συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα

$$u_c(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 u^2(I)}$$

όπου, $u(V)$ και $u(I)$ οι τυπικές αβεβαιότητες τάσης και έντασης, αντίστοιχα

$$u_c(R) = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u^2(V) + \left(-\frac{V}{I^2}\right)^2 u^2(I)}$$

$$u_c(R) = \frac{1}{I}\sqrt{u^2(V) + \left(\frac{V}{I}\right)^2 u^2(I)}$$

Λύση (συνέχεια)

B2. Αβεβαιότητα **τάσης** τύπου Α

Η αβεβαιότητα της εκτιμώμενης τιμής $\bar{V} = 4.987814\ V$ της τάσης (αβεβαιότητα τύπου Α) από τον πίνακα τιμών των 5 ανεξάρτητων μετρήσεων της τάσης, υπολογίζεται σε

$$u_A(\bar{V}) = \sqrt{\frac{1}{5(5-1)} \sum_{k=1}^{5} (V_k - \bar{V})^2}$$

$$u_A(\bar{V}) = 2.16 \times 10^{-4}\ V = 216\ \mu V$$

Λύση (συνέχεια)

B3. Αβεβαιότητα **τάσης** τύπου Β

Από τον πίνακα με τις προδιαγραφές ακριβείας για το DMM στη λειτουργία “DC Voltage” και στην κλίμακα “10.00000 V”

$$(0.0030\% \text{ of reading} + 0.0005\% \text{ of range})$$

το μέγιστο σφάλμα του οργάνου DMM είναι

$$= 0.0030\% \ \times \bar{V} + 0.0005\% \ \times (10.00000\, V)$$

$$= 0.0030\% \ \times 4.987814 + 0.0005\% \ \times 10.00000 = 200\ \mu V$$

Οπότε, η εκτιμάμε ότι η αβεβαιότητα τάσης λόγω σφάλματος του (αβεβαιότητα τύπου Β) είναι

$$u_B(\bar{V}) = \frac{200\ \mu V}{\sqrt{3}} = 115\ \mu V$$

Ας σημειωθεί, η αβεβαιότητα αυτή, ως τύπου Β, παρότι δεν αναφέρεται ρητά, θεωρείται σε διάστημα εμπιστοσύνης 95%

Λύση (συνέχεια)

Συνδυάζοντας την αβεβαιότητα τύπου Α, η οποία είναι σε διάστημα εμπιστοσύνης 67% (γιατί;) με την αβεβαιότητα τύπου Β (95%), η συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα για την τάση είναι

$$u(V) = \sqrt{[2 \cdot u_A(V)]^2 + u_B^2(\bar{V})}$$

$$= \sqrt{(2 \cdot 216\ \mu V)^2 + (115\ \mu V)^2}$$

$$u(V) = 447\ \mu V$$

Λύση (συνέχεια)

B4. Αβεβαιότητα **ρεύματος** τύπου B

Από τον πίνακα με τις προδιαγραφές αβεβαιότητας για την πηγή ρεύματος στην κλίμακα “100 mA”

$$0.1\% \text{ of reading} + 50\ \mu A$$

το μέγιστο σφάλμα στην τιμή του ρεύματος εκτιμάται σε

$$0.1\% \times (100\ \mathrm{m}A) + 50\ \mu A$$

$$= 0.001 \times (100\ \mathrm{m}A) + 50\ \mu A = 10\ \mu A + 50\ \mu A = 60\ \mu A$$

Επομένως, η αβεβαιότητα της τιμής του ρεύματος λόγω σφάλματος της πηγής (αβεβαιότητα τύπου B) εκτιμάται σε

$$u_B(I) = \frac{60\ \mu A}{\sqrt{3}} = 35\ \mu\mathrm{A}$$

Λύση (συνέχεια)

Η προσδοκώμενη τιμή της αντίστασης είναι

$$R = \frac{\bar{V}}{I} = \frac{4.987814\ V}{100\ \text{mA}} = 49.87814\ \Omega$$

και η εκτιμώμενη αβεβαιότητα αυτής της τιμής.

$$u_c(R) = \frac{1}{(100\ \text{mA})}\sqrt{u^2(V) + \left(\frac{\bar{V}}{I}\right)^2 u^2(I)}$$

$$= \frac{1}{(100\ \text{mA})}\sqrt{(447\ \mu V)^2 + (49.87814\ \Omega)^2(35\ \mu A)^2}$$

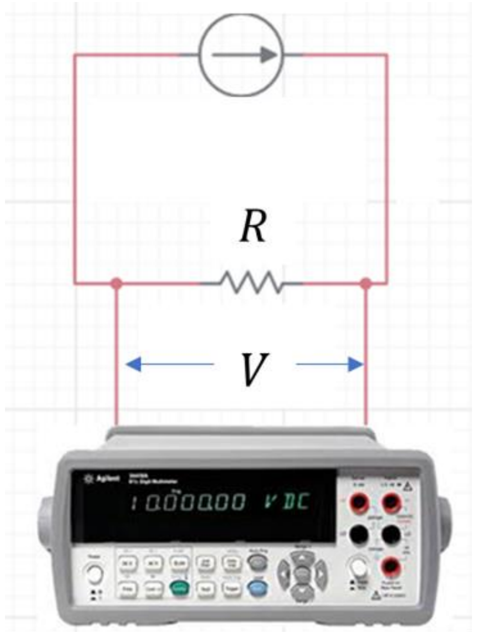
$$u_c(R) = 0.018\Omega$$

Τελικά, η απάντηση για την μετρούμενη τιμή της αντίστασης είναι

$R \pm u_c(R) = 49.878\ \Omega \pm 0.018\Omega$ με διάστημα αβεβαιότητας 95%

Πρόβλημα

Η dc ισχύς P που καταναλώνεται σε μια ωμική αντίσταση προσδιορίζεται μετρώντας τόσο την τιμή της R όσο και την τιμή της dc διαφοράς δυναμικού V στα άκρα της με το ψηφιακό πολύμετρο (DMM) 6½ ψηφίων του προηγούμενου προβλήματος και χρησιμοποιώντας τη σχέση, $P = V^2/R$.



DMM

Στον πίνακα παρακάτω δίνονται οι τιμές πέντε ανεξάρτητων μετρήσεων για την τάση και την αντίσταση

Α/α μέτρησης	V (V)	R (Ω)
1	5.00972	9,9824
2	4.97441	9,9935
3	5.00818	10,0027
4	4.98827	9,9842
5	4.95849	10,0083

Πρόβλημα (συνέχεια)

Οι προδιαγραφές ακριβείας (accuracy specifications) για το πολύμετρο στη λειτουργία “DC Voltage” και “Resistance” είναι

DC Characteristics

Accuracy Specifications ±(% of reading + % of range) [1]

Function	Range [3]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [2] T_{CAL} ± 1 °C	90 Day T_{CAL} ± 5 °C	1 Year T_{CAL} ± 5 °C	Temperature Coefficient/°C 0 °C to (T_{CAL} – 5 °C) (T_{CAL} + 5 °C) to 55 °C
DC	100.0000 mV		0.0030+0.0030	0.0040+0.0035	0.0050+0.0035	0.0005+0.0005
	1.000000 V		0.0020+0.0006	0.0030+0.0007	0.0035+0.0007	0.0005+0.0001
	10.00000 V		0.0015+0.0004	0.0020+0.0005	0.0030+0.0005	0.0005+0.0001
	100.0000 V		0.0020+0.0006	0.0035+0.0006	0.0040+0.0006	0.0005+0.0001
	1000.000 V [5]		0.0020+0.0006	0.0035+0.0006	0.0040+0.0006	0.0005+0.0001
Resistance [4]	100.0000 Ω	1 mA Current Source	0.0030+0.0030	0.008+0.004	0.010+0.004	0.0006+0.0005
	1.000000 KΩ	1 mA	0.0020+0.0005	0.007+0.001	0.010+0.001	0.0006+0.0001
	10.00000 KΩ	100 μA	0.0020+0.0005	0.007+0.001	0.010+0.001	0.0006+0.0001
	100.0000 KΩ	10 μA	0.0020+0.0005	0.007+0.001	0.010+0.001	0.0006+0.0001
	1.000000 MΩ	5.0 μA	0.0020+0.0010	0.010+0.001	0.012+0.001	0.0010+0.0002
	10.00000 MΩ	500 nA	0.0100+0.0010	0.030+0.001	0.040+0.001	0.0030+0.0004
	100.0000 MΩ	500 nA ‖ 10 MΩ	0.200+0.001	0.600+0.001	0.800+0.001	0.1000+0.0001
	1.000000 GΩ	500 nA ‖ 10 MΩ	2.000+0.001	6.000+0.001	8.000+0.001	1.0000+0.0001

Πρόβλημα (συνέχεια)

Δώστε μια εκτίμηση για την προσδοκώμενη τιμή της ισχύος καθώς και την εκτιμώμενη αβεβαιότητα αυτής της τιμής στη μορφή

$$P \pm u_c(P)$$

Τέλος κεφαλαίου