

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4^Η

Μέτρηση σύνθετης αντίστασης

ΜΕΡΟΣ Β: Διατάξεις μέτρησης - Γέφυρες και μέθοδοι ισοροπίας

Μέτρηση παθητικών
στοιχείων με
αμπερόμετρο και
βολτόμετρο

Μέτρηση της τιμής φορτίου με αμπερόμετρο και βολτόμετρο - 1^η Διάταξη

- Αμπερόμετρο εσωτερικής αντίστασης Z_A σε σειρά με το άγνωστο στοιχείο Z
- Βολτόμετρο εσωτερικής αντίστασης Z_V παράλληλα στο συνδυασμό $Z_A + Z$

Μετρούμενη τάση

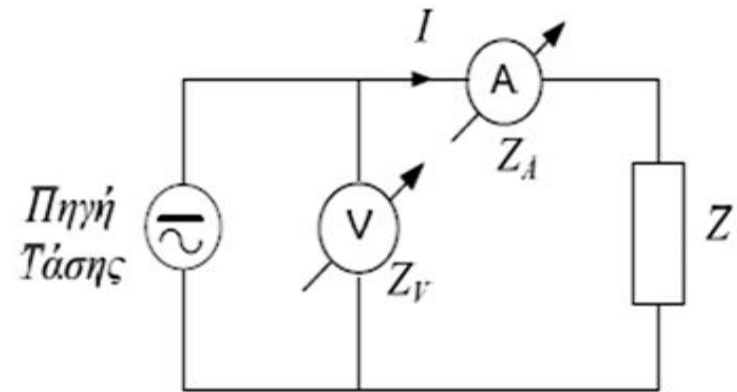
$$V = I(Z_A + Z)$$

Προκύπτει τιμή φορτίου

$$Z = \frac{V}{I} - Z_A$$

Σφάλμα υπολογισμού από το πηλίκιο V/I :

$$\Delta Z = \frac{V}{I} - \left(\frac{V}{I} - Z_A \right) = Z_A$$



Διάταξη 1^η – Το σχετικό σφάλμα μέτρησης

- Σχετικό σφάλμα:

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{Z_A}{Z}$$

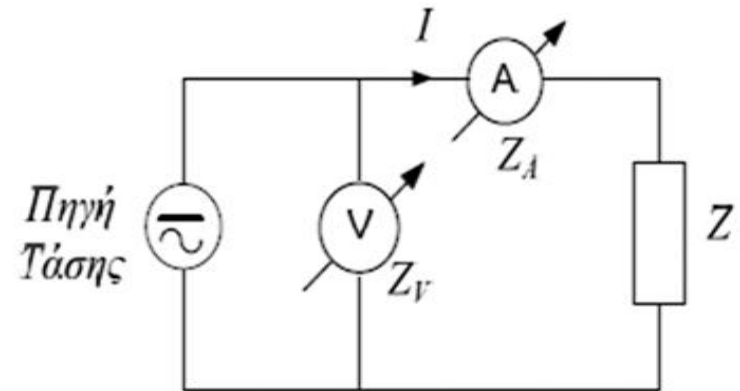
- Το σχετικό σφάλμα διατηρείται πολύ μικρό, δηλαδή,

$$\frac{\Delta Z}{Z} \ll 1$$

και μπορεί να αγνοηθεί, αν

$$Z_A \ll Z$$

δηλαδή, η προς μέτρηση αντίσταση είναι πολύ μεγαλύτερη της εσωτερικής αντίστασης του αμπερομέτρου.



Παράδειγμα

Ποια πρέπει να είναι η μέγιστη τιμή εσωτερικής αντίστασης Z_A του αμπερομέτρου ώστε το σχετικό σφάλμα στην εκτίμηση της τιμής του φορτίου Z από το πηλίκο V/I των ενδείξεων βολτομέτρου και αμπερομέτρου του κυκλώματος της εικόνας να μην υπερβαίνει τα 10ppm;

Απάντηση

$$\text{Σχετικό σφάλμα } \frac{\Delta Z}{Z} \leq 10 \text{ppm}$$

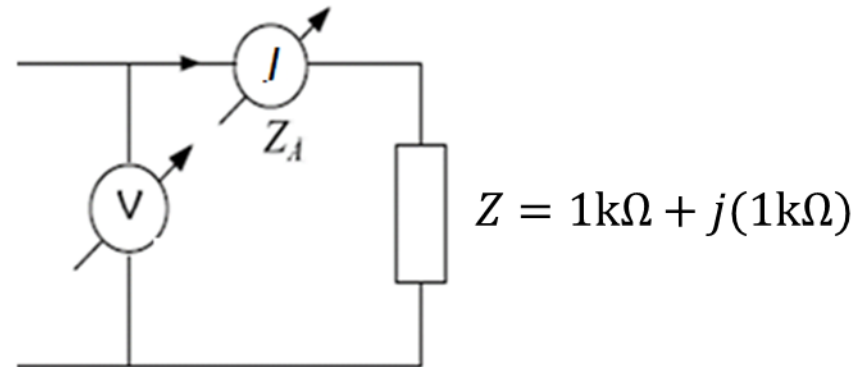
$$\left| \frac{Z_A}{Z} \right| \leq 10 \text{ppm}$$

$$|Z_A| \leq |Z| \times 10^{-5}$$

$$\text{Είναι } |Z| = |1 + j| \text{ k}\Omega = \sqrt{2} \text{ k}\Omega = 1.41 \text{ k}\Omega$$

Επομένως,

$$|Z_A| \leq 14 \text{ m}\Omega$$



Μέτρηση της τιμής φορτίου με αμπερόμετρο και βολτόμετρο - 2^η Διάταξη

- Βολτόμετρο εσωτερικής αντίστασης Z_V παράλληλα στο άγνωστο στοιχείο Z
- Αμπερόμετρο εσωτερικής αντίστασης Z_A σε σειρά με στο συνδυασμό $Z_V \parallel Z$

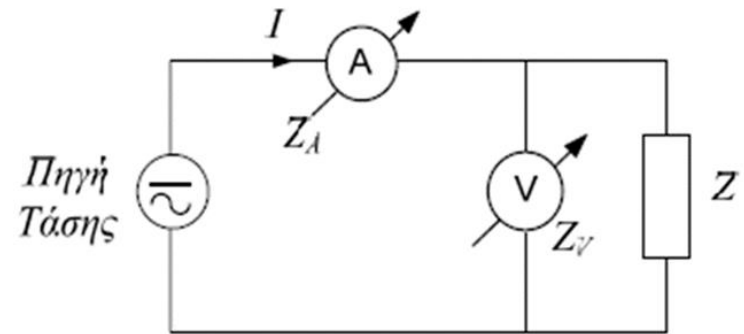
Μετρούμενο ρεύμα $I = V \left(\frac{1}{Z_V} + \frac{1}{Z} \right)$

Προκύπτει τιμή φορτίου

$$Z = \frac{Z_V V}{IZ_V - V}$$

Σφάλμα υπολογισμού από το πηλίκιο V/I :

$$\Delta Z = \frac{V}{I} - \left(\frac{Z_V V}{IZ_V - V} \right) = \frac{Z^2}{Z + Z_V}$$



Διάταξη 2^η – Το σχετικό σφάλμα μέτρησης

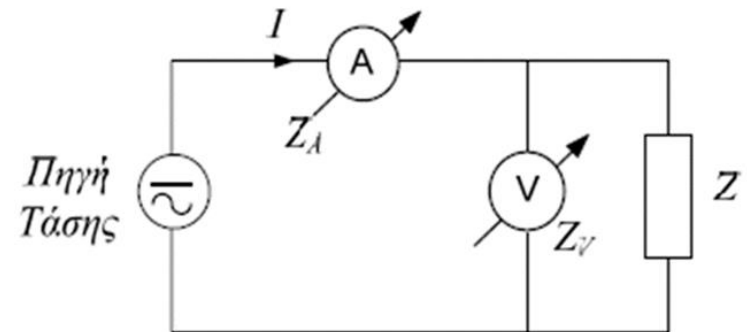
- Σχετικό σφάλμα:

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{Z}{Z + Z_V}$$

- Το σχετικό σφάλμα διατηρείται πολύ μικρό ($\frac{\Delta Z}{Z} \ll 1$) και μπορεί να αγνοηθεί, αν

$$Z_V \gg Z$$

δηλαδή, αν η προς μέτρηση αντίσταση είναι πολύ μικρότερη της εσωτερικής αντίστασης του βολτομέτρου.



Παράδειγμα

Βρείτε την ελάχιστη επιτρεπόμενη τιμή εσωτερικής αντίστασης Z_V του βολτομέτρου ώστε το σχετικό σφάλμα στην εκτίμηση της τιμής του φορτίου Z από το πηλίκο V/I των ενδείξεων βολτομέτρου και αμπερομέτρου του κυκλώματος της εικόνας να μην υπερβαίνει τα 10ppm;

Απάντηση

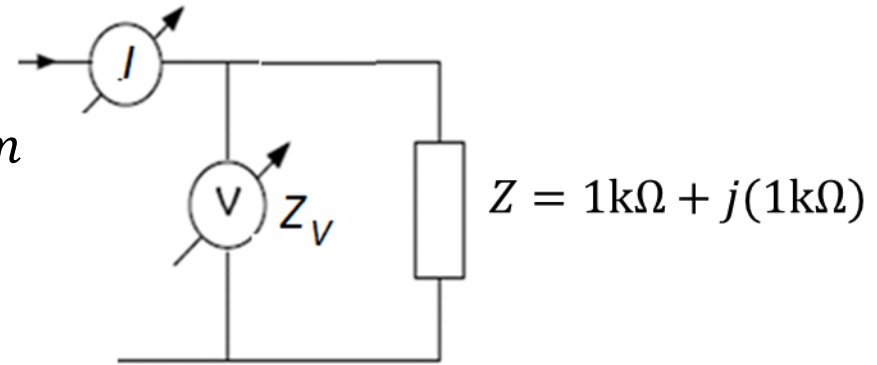
$$\text{Σχετικό σφάλμα } \frac{\Delta Z}{Z} = \left| \frac{Z}{Z+Z_V} \right| \leq 10\text{ppm}$$

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{Z_V}{Z}} \right| \leq 10^{-5}$$

$$\left| 1 + \frac{Z_V}{Z} \right| \cong \left| \frac{Z_V}{Z} \right| \geq 10^5$$

$$|Z_V| \geq |Z| \times 10^5$$

$$|Z_V| \geq 1.4\text{k}\Omega \times 10^5 \quad \text{ή} \quad |Z_V| \geq 0.14\text{G}\Omega$$

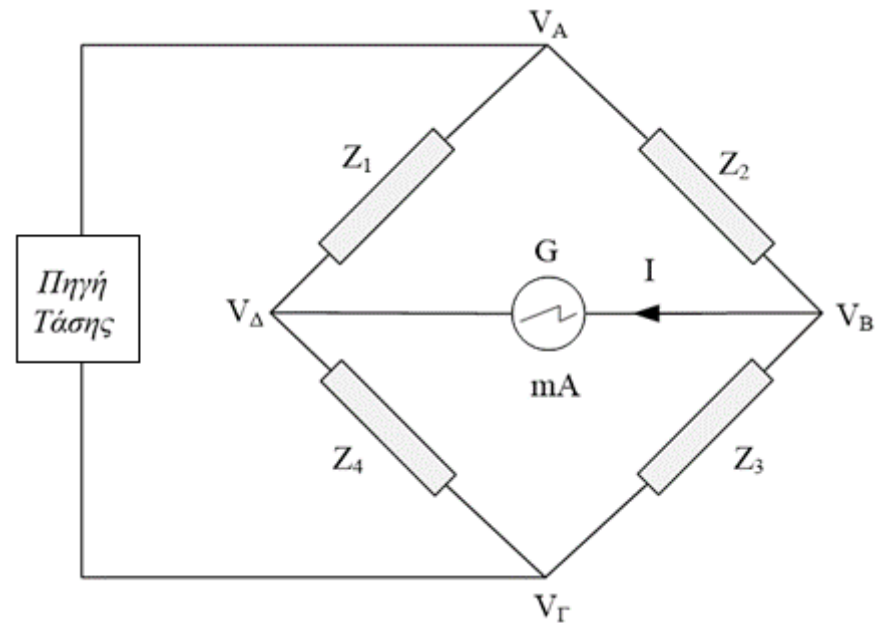




Γέφυρες και μέθοδοι ισορροπίας

Γέφυρες και μέθοδοι ισορροπίας

- Βασίζονται στο μηδενισμό του ρεύματος **I**
- Μηδενισμός ρεύματος συνεπάγεται επίτευξη **ισορροπίας** (equilibrium)
- Ο μηδενισμός ρεύματος μπορεί να γίνει με πολύ μεγάλη ακρίβεια ($\leq 10^{-5}$) με τη χρήση γαλβανομέτρου G (αμπερόμετρο μικρών ρευμάτων)
- Οι **μέθοδοι ισορροπίας** επιτρέπουν εκτέλεση μετρήσεων πολύ μεγάλης ακρίβειας και γίνονται με τη βοήθεια **γεφυρών** μέτρησης



Κύκλωμα γενικής γέφυρας (bridge)

- Τα στοιχεία $Z_1 - Z_4$ είναι ωμικές αντιστάσεις ή πηνία ή πυκνωτές ή συνδυασμός αυτών

Γενική σχέση ισορροπίας γέφυρας

Στην κατάσταση ισορροπίας

$$I = 0 \Rightarrow V_{B\Delta} = 0$$

$$V_B - V_\Delta = 0$$

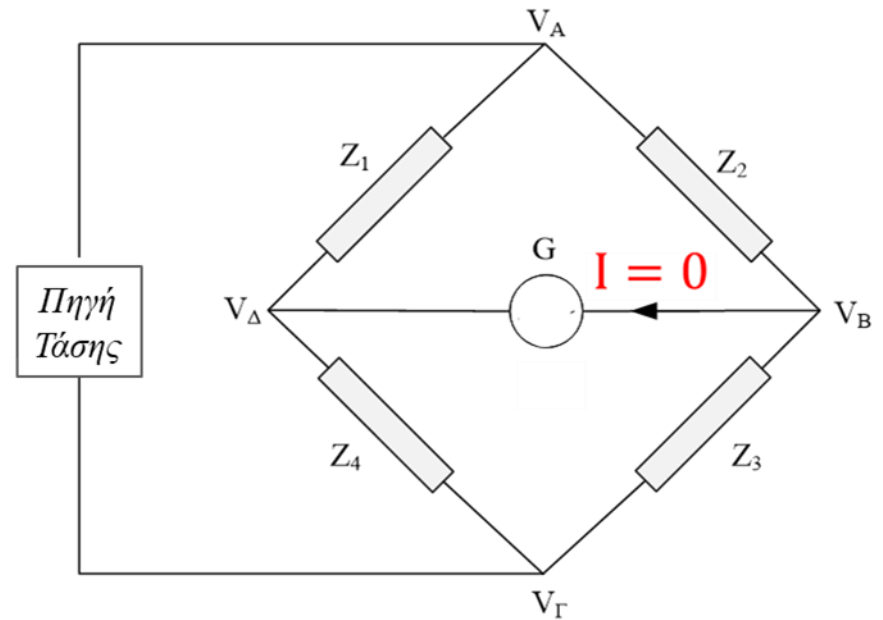
$$(V_B - V_\Gamma) - (V_\Delta - V_\Gamma) = 0$$

$$\text{ή } V_{B\Gamma} = V_{\Delta\Gamma}$$

$$\frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} V_{A\Gamma} = \frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} V_{A\Gamma} (;\;;)$$

απ' όπου προκύπτει η γενική σχέση ισορροπίας της γέφυρας

$$\mathbf{Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4}$$



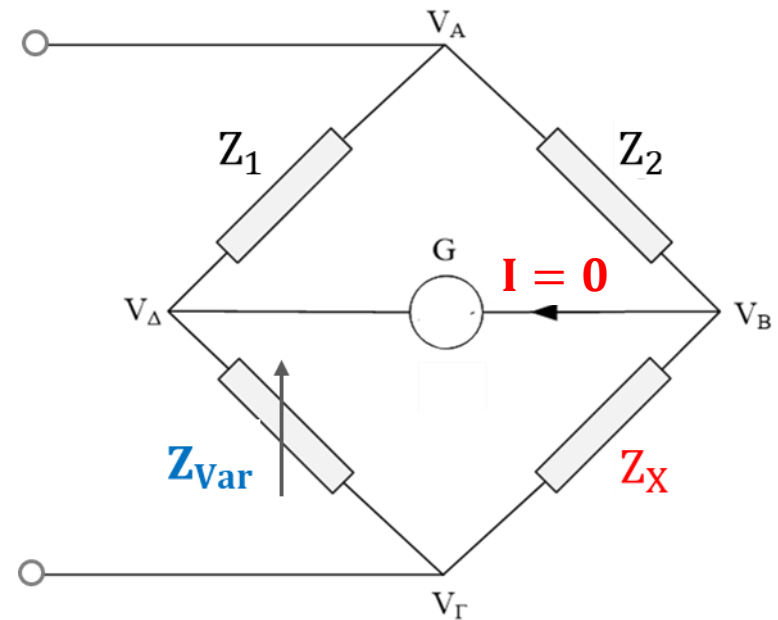
Μέθοδος ισορροπίας γέφυρας για τον υπολογισμό της άγνωστης τιμής της (σύνθετης) αντίστασης στοιχείου

- Z_X αντίσταση άγνωστης τιμής
- Z_1, Z_2 σταθερές αντιστάσεις γνωστών τιμών
- Z_{Var} αντίσταση μεταβλητής τιμής (ποτενσιόμετρο ή κιβώτιο αντιστάσεων)

«Ισορροπούμε» τη γέφυρα, δηλαδή, μεταβάλλουμε την τιμή της Z_{Var} μέχρι μηδενισμού της ένδειξης ρεύματος του γαλβανομέτρου G (ή αμπερομέτρου ή βολτομέτρου).

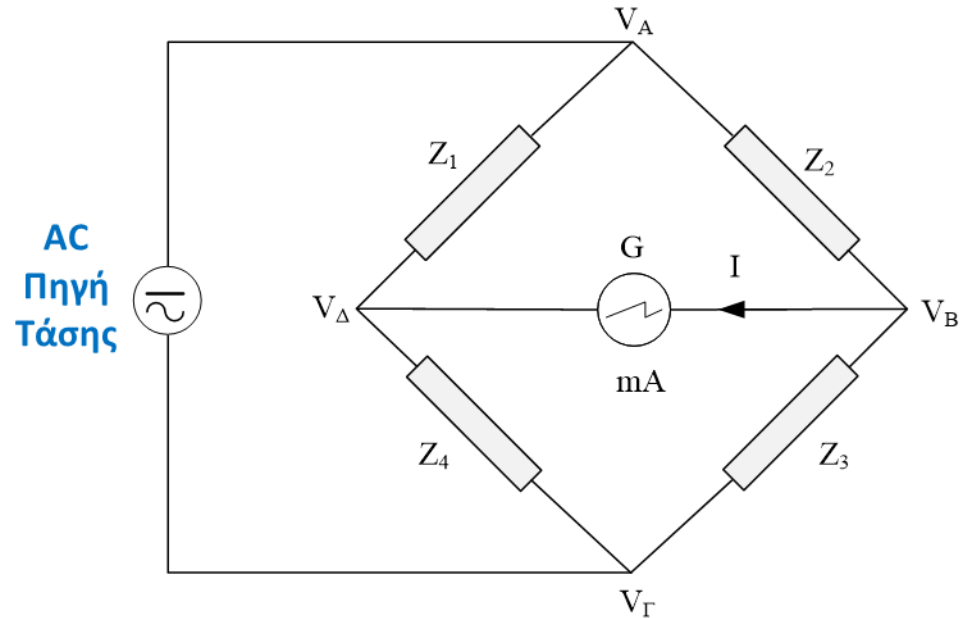
Τότε $Z_1 Z_X = Z_2 Z_{Var}$ και η άγνωστη αντίσταση υπολογίζεται

$$Z_X = \frac{Z_2}{Z_1} Z_{Var}$$



AC γέφυρα

- Τροφοδοτείται από **AC πηγή τάσης**
- Χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της χωρητικότητας πραγματικών πυκνωτών ή της αυτεπαγωγής πραγματικών πηνίων.
- Τα στοιχεία των κλάδων της AC γέφυρας είναι εν γένει σύνθετες αντιστάσεις



$$Z_i = R_i + jX_i = |Z_i|e^{j\theta_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

όπου $|Z_i| = \sqrt{R_i^2 + X_i^2}$ και $\theta_i = \tan^{-1}(X_i/R_i)$

AC γέφυρα σε ισορροπία

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη ισορροπίας

$$Z_X Z_3 = Z_2 Z_4$$

τις σύνθετες αντιστάσεις σε καρτεσιανή μορφή

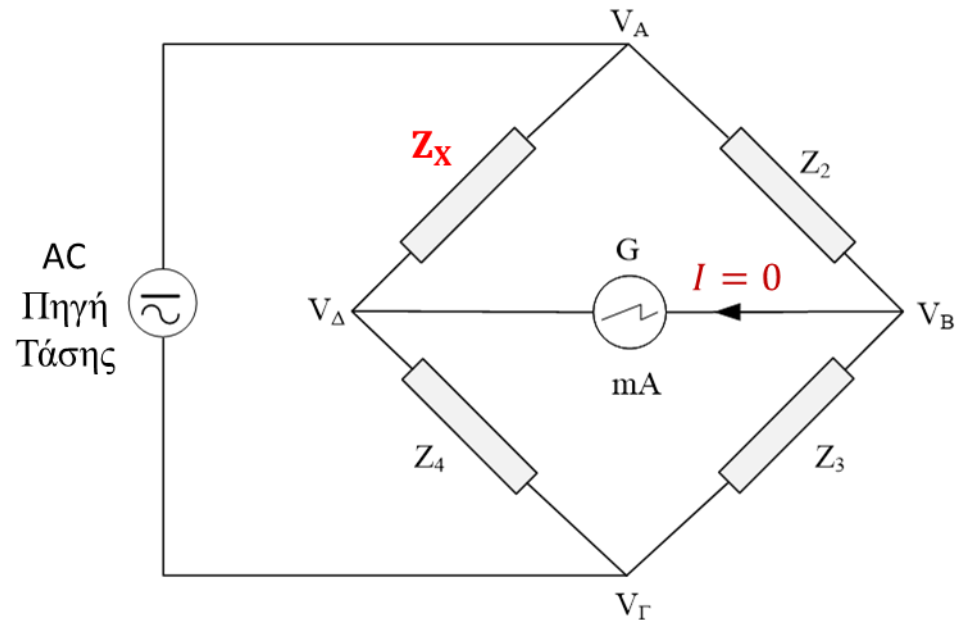
$$Z_i = R_i + jX_i, \quad i = X, 2, 3, 4$$

και εξισώνοντας πραγματικά και φαντασιακά μέρη, παίρνουμε το σύστημα εξισώσεων

$$R_3 R_X - X_3 X_X = R_2 R_4 - X_2 X_4$$

$$X_3 R_X + R_3 X_X = R_2 X_4 + X_2 R_4$$

από το οποίο βρίσκουμε τις ζητούμενες τιμές αντίστασης R_X και ανάδρασης X_X του άγνωστου στοιχείου Z_X .



AC γέφυρα σε ισορροπία (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη ισορροπίας

$$Z_X Z_3 = Z_2 Z_4$$

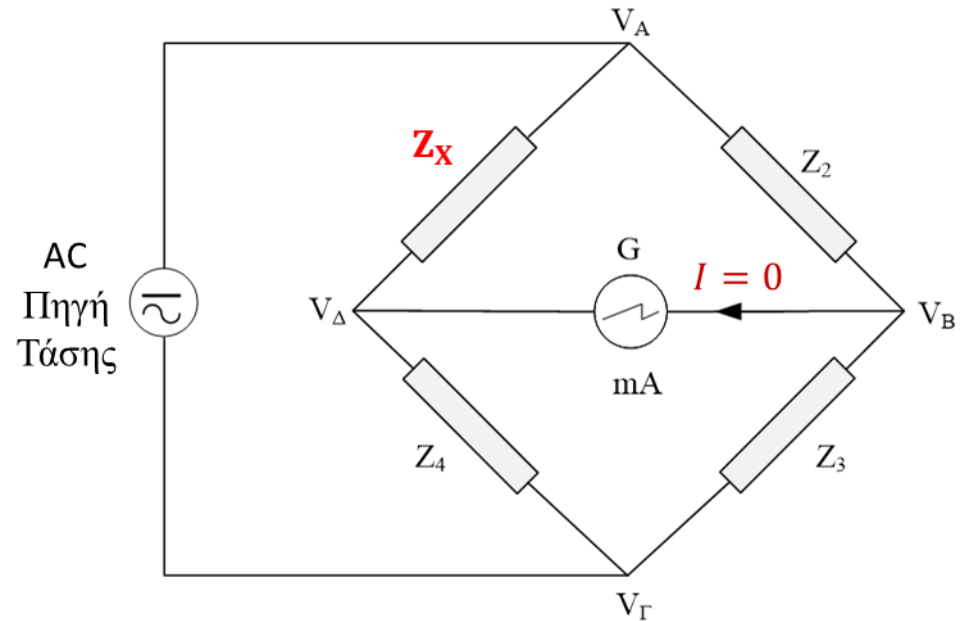
τις σύνθετες αντιστάσεις των στοιχείων σε πολική μορφή

$$Z_i = |Z_i| e^{j\theta_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

παίρνουμε το σύστημα εξισώσεων σε πολικές συνιστώσες

$$|Z_X| |Z_3| = |Z_2| |Z_4|$$

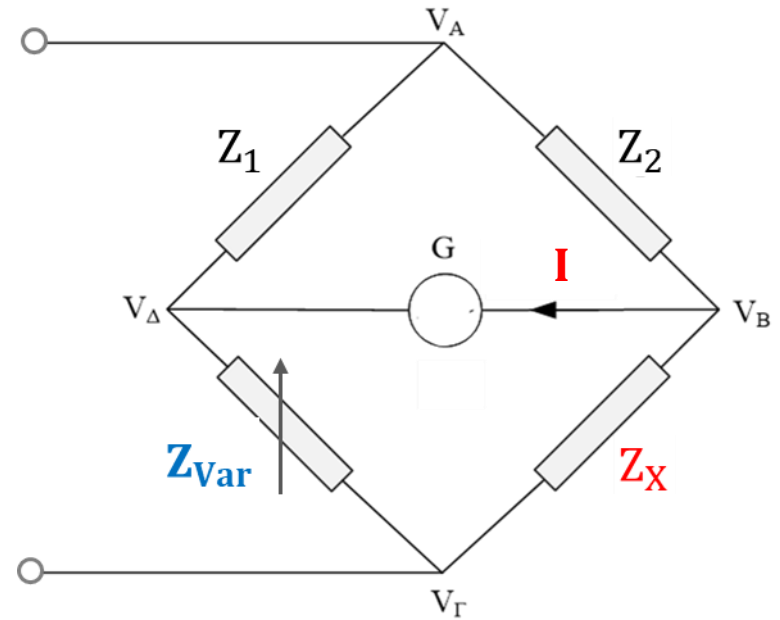
$$\theta_X + \theta_3 = \theta_2 + \theta_4$$



Ευαισθησία της γέφυρας

Η ευαισθησία (sensitivity) της γέφυρας μπορεί να οριστεί σαν ο λόγος της μεταβολής του ρεύματος ΔI ως προς μικρή μεταβολή ΔZ_{var} της μεταβλητής αντίστασης γύρω από τη θέση ισορροπίας.

$$\text{Sensitivity} = \left. \frac{\Delta I}{\Delta Z_{\text{var}}} \right|_{I=0}$$



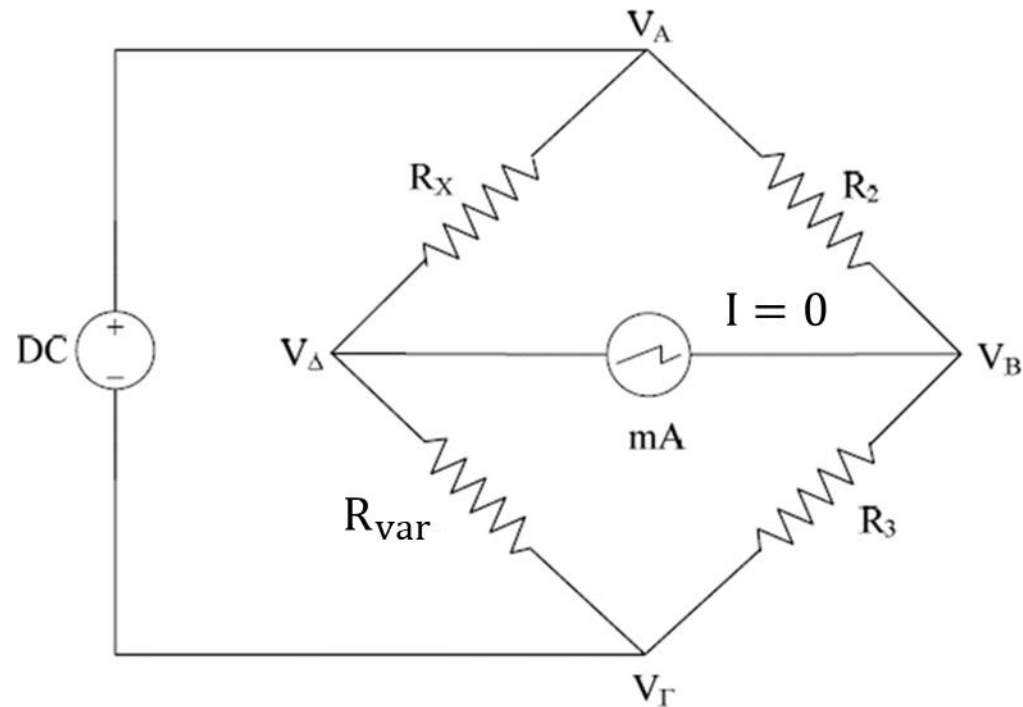
Μέτρηση ωμικής
αντίστασης R με γέφυρα


Μέτρηση ωμικής αντίστασης R με γέφυρα - Γέφυρα Wheatstone

Γέφυρα συνεχούς ρεύματος (DC) που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό με μεγάλη ακρίβεια των τιμών άγνωστων ωμικών αντιστάσεων από 1Ω ως $10 \text{ M}\Omega$

Με εξισορρόπηση της γέφυρας ($I = 0$) με τη βοήθεια μεταβλητής R_{var} , έχουμε

$$R_X = \frac{R_2}{R_3} R_{\text{var}}$$





Μέτρηση χωρητικότητας με γέφυρα

Απλή γέφυρα μέτρησης χωρητικότητας (Sauty – Wien)

Από τη συνθήκη ισορροπίας

$$Z_X Z_3 = Z_2 Z_4$$

για σύνθετες αντιστάσεις των στοιχείων της γέφυρας

$$Z_X = R_X + 1/j\omega C_X$$

$$Z_2 = R_2$$

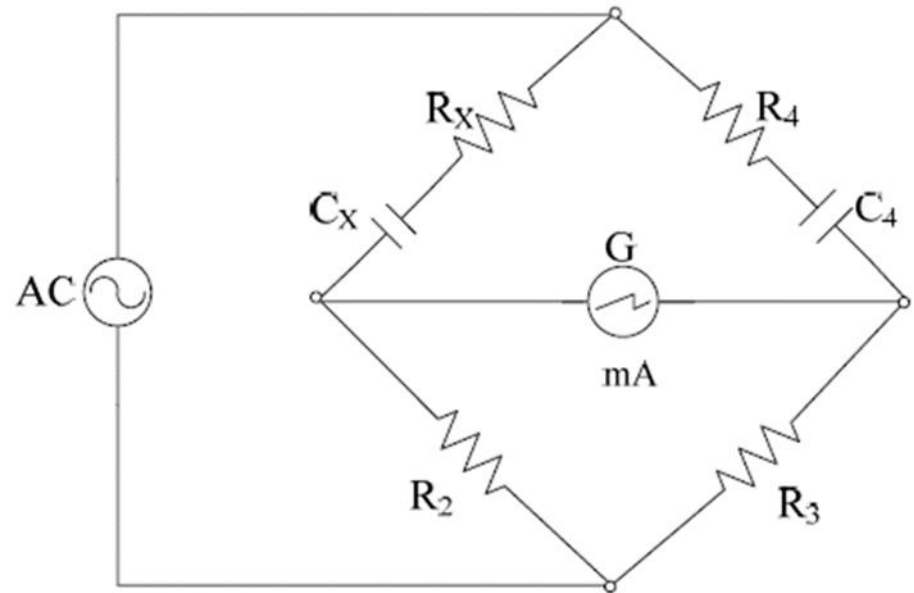
$$Z_3 = R_3 \text{ και}$$

$$Z_4 = R_4 + 1/j\omega C_4$$

προκύπτουν

$$R_X = \frac{R_2 R_4}{R_3}$$

$$C_X = \frac{R_3}{R_2} C_4$$



Γέφυρα Schering

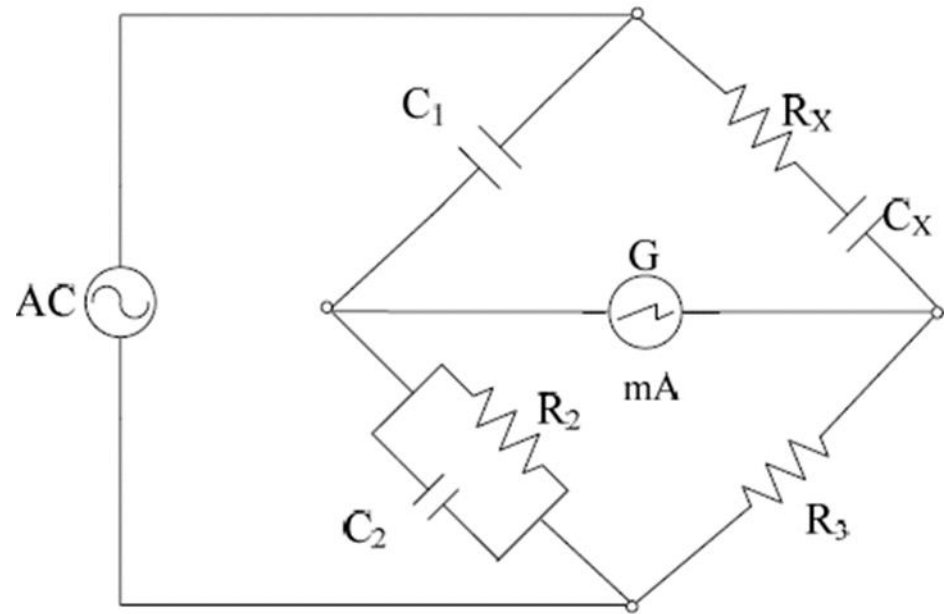
Σύγκριση της άγνωστης
πραγματικής χωρητικότητας

$$(R_X, C_X)$$

με γνωστό πρότυπο με αμελητέες
απώλειες πυκνωτή (ιδανικός
πυκνωτής) χωρητικότητας

$$C_1$$

Έχει εφαρμογές σε εγκαταστάσεις
μεταφοράς και διανομής
ηλεκτρικής ενέργειας για μέτρηση
συντελεστή απωλειών σε μονωτικά
υλικά.



Γέφυρα Schering (συνέχεια)

Από τη συνθήκη ισορροπίας

$$Z_X Z_2 = Z_1 Z_3$$

για σύνθετες αντιστάσεις των στοιχείων της γέφυρας

$$Z_X = R_X + 1/j\omega C_X$$

$$Z_1 = 1/j\omega C_1$$

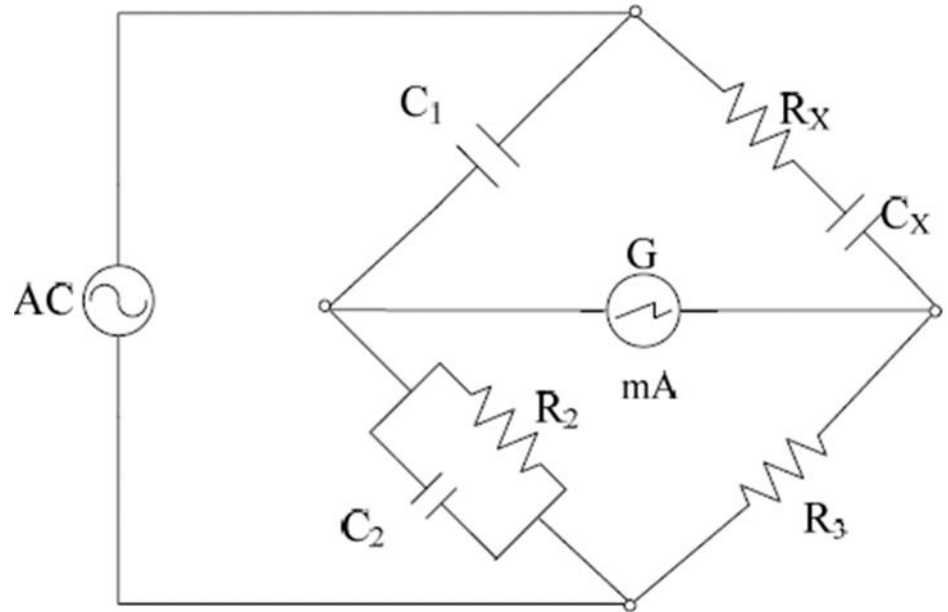
$$Z_2 = R_2 / (1 + j\omega R_2 C_2)$$

$$Z_3 = R_3$$

προκύπτουν

$$R_X = \frac{C_2}{C_1} R_3$$

$$C_X = \frac{R_2}{R_3} C_1$$



Υπολογισμός συντελεστή απωλειών μονωτικού με γέφυρα Schering

Συντελεστής απωλειών πυκνωτή

$$\alpha = \frac{\text{Resistace}}{\text{Reactance}} = \frac{R_X}{1/\omega C_X} = \omega R_X C_X$$

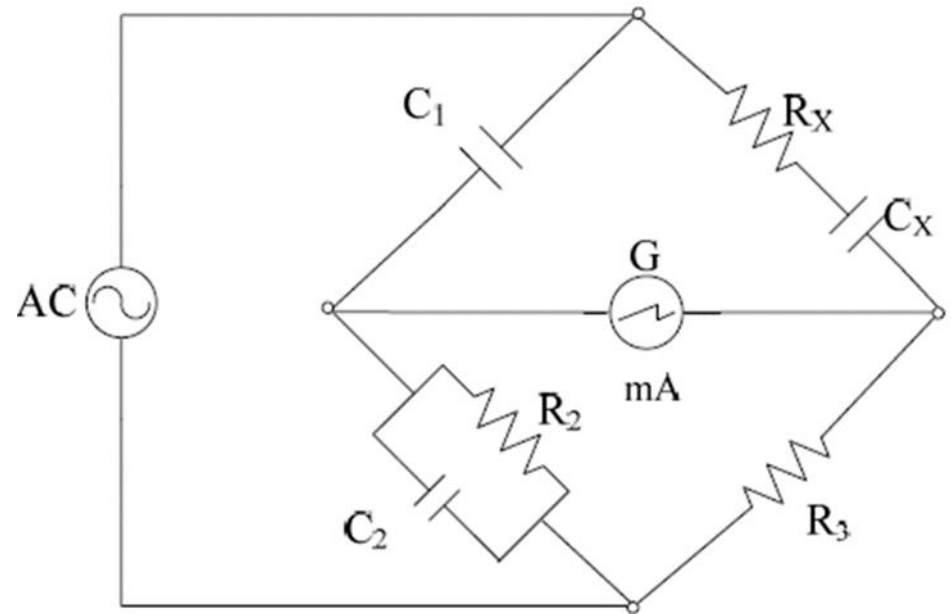
Αντικαθιστώντας τις τιμές της γέφυρας Schering

$$R_X = \frac{C_2}{C_1} R_3$$

$$C_X = \frac{R_2}{R_3} C_1$$

ο ζητούμενος συντελεστής προκύπτει

$$\alpha = \omega R_2 C_2$$



Μέτρηση συχνότητας με
γέφυρα
Wien - Robinson

Γέφυρα Wien - Robinson

- Χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση της συχνότητας
- Προϋποθέτει γνωστές τιμές αντιστάσεων όλων των στοιχείων

Από τη συνθήκη ισορροπίας

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$$

για αντιστάσεις στοιχείων γέφυρας

$$Z_1 = R_1 + 1/j\omega C_1$$

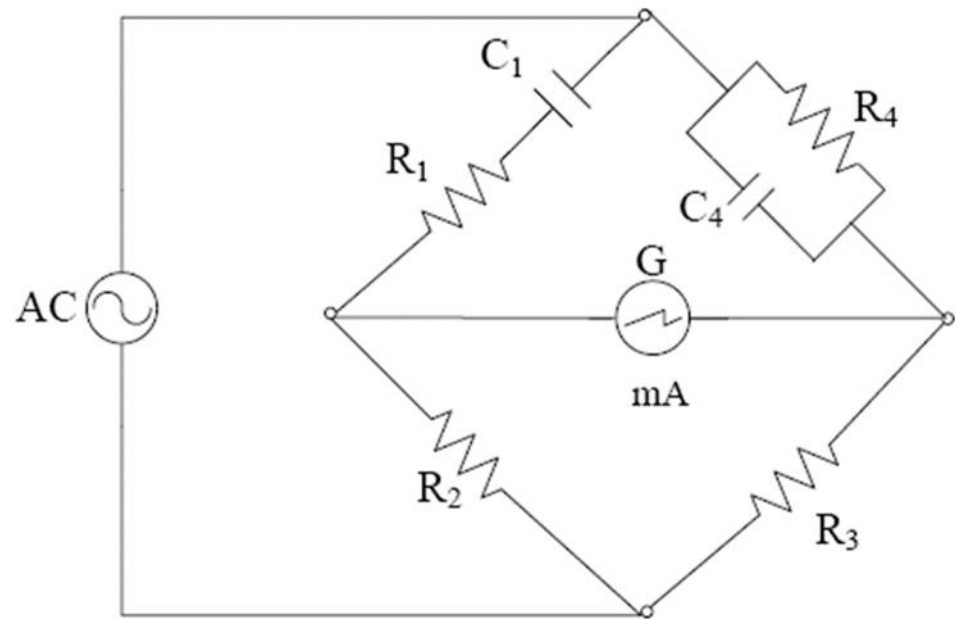
$$Z_2 = R_2$$

$$Z_3 = R_3$$

$$Z_4 = R_4 / (1 + j\omega R_4 C_4)$$

προκύπτει

$$\omega^2 = \frac{1}{R_1 R_4 C_1 C_4}$$



Γέφυρα Wien – Robinson (συνέχεια)

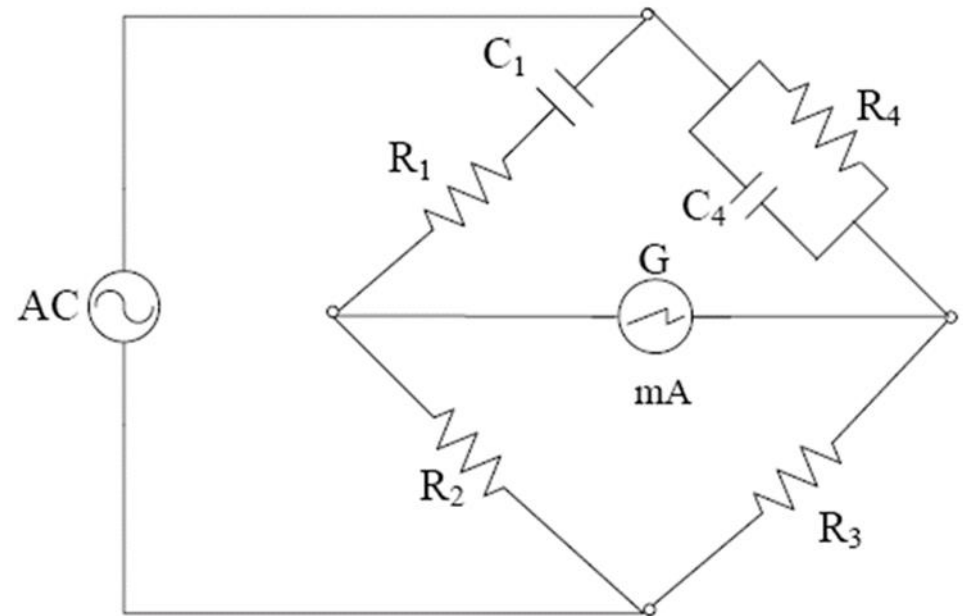
$$\omega^2 = \frac{1}{R_1 R_4 C_1 C_4}$$

Θέτοντας

- συμμεταβλητές τις R_1 και R_4 , δηλαδή, $R_1 = R_4 = R$
- συμμεταβλητούς τους πυκνωτές C_1 και C_4 ($C_1 = C_4 = C$)
- και σταθερές τις R_2, R_3 ώστε $R_2 = 2R_3$

η σχέση για τη συχνότητα απλοποιείται στη

$$\omega = \frac{1}{RC}$$



Μέτρηση σύνθετης
αντίστασης πηνίου με
γέφυρα

Γέφυρα Maxwell

Χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της σύνθετης πηνίων συνήθους ποιότητας

- με τιμές συντελεστή απωλειών

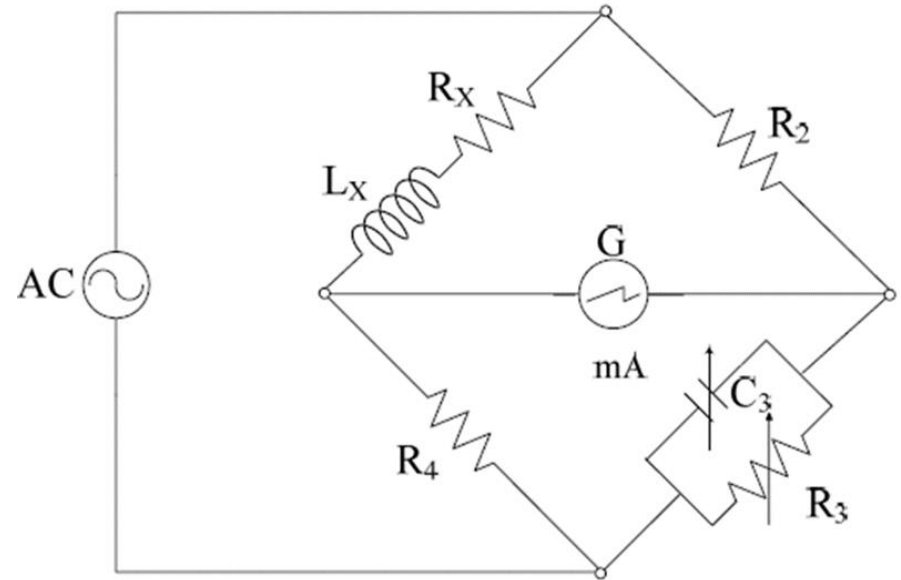
$$\alpha = \frac{\text{Resistance}}{\text{Reactance}} = \frac{R_X}{\omega L_X}$$

από 0.1 ως 5

- ή συντελεστή ποιότητας

$$Q = 1/\alpha$$

με τιμές από 0.2 ως 10



Μέτρηση σύνθετης αντίστασης πηνίου με γέφυρα Maxwell

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη ισορροπίας

$$Z_X Z_3 = Z_2 Z_4$$

τις τιμές των αντιστάσεων των στοιχείων της γέφυρας

$$Z_X = R_X + j\omega L_X,$$

$$Z_2 = R_2,$$

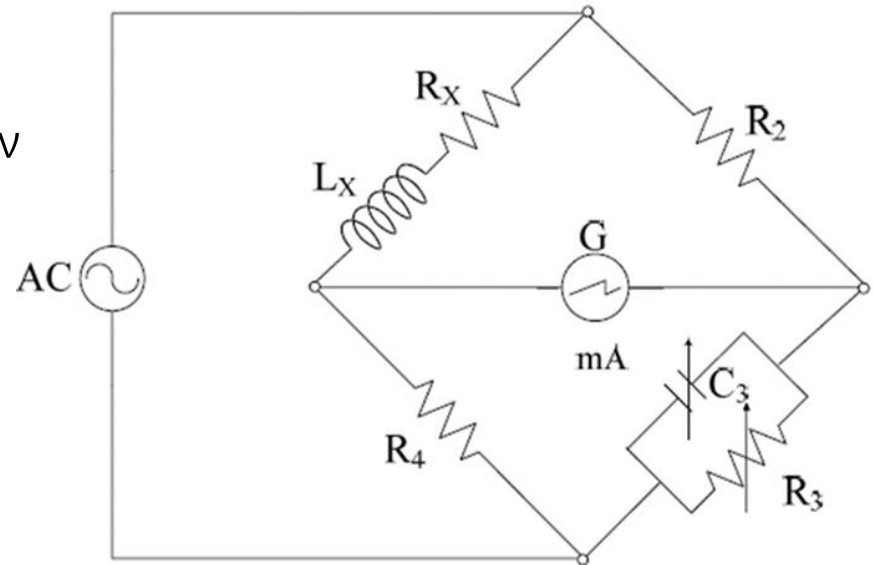
$$Z_3 = R_3 / (1 + j\omega R_3 L_3) \text{ και}$$

$$Z_4 = R_4$$

προκύπτουν

$$R_X = \frac{R_2 R_4}{R_3}$$

$$L_X = R_2 R_4 C_3$$



Υπολογισμός συντελεστή απωλειών πηνίου με γέφυρα Maxwell

Αντικαθιστώντας στο συντελεστή απωλειών πηνίου

$$\alpha = \frac{R_X}{\omega L_X}$$

τις τιμές σύνθετης αντίστασης από τη γέφυρα

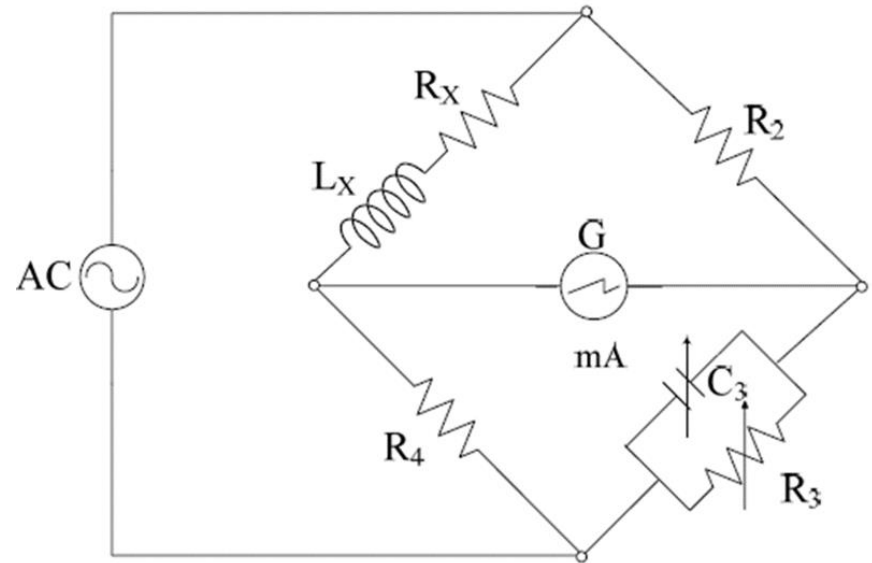
$$R_X = \frac{R_2 R_4}{R_3} \quad \text{και} \quad L_X = R_2 R_4 C_3$$

προκύπτει

$$\alpha = \frac{1}{\omega R_3 C_3}$$

και ο συντελεστής ποιότητας

$$Q = \frac{1}{\alpha} = \omega R_3 C_3$$

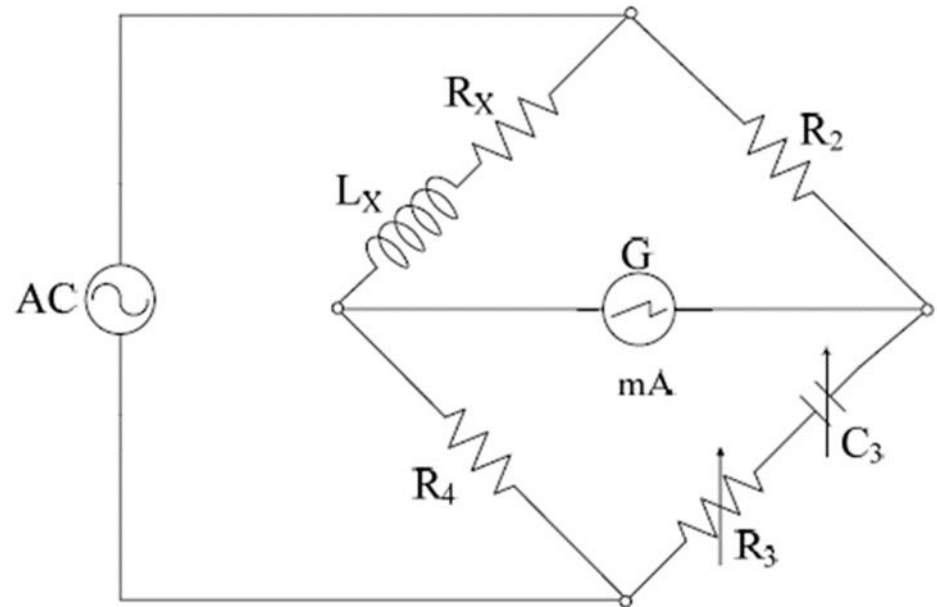


Γέφυρα Hay

- Αποτελεί παραλλαγή της γέφυρας Maxwell για τη μέτρηση επαγωγής πηνίων υψηλής ποιότητας.
- Ένας από τους κλάδους της γέφυρας Hay διαθέτει έναν πυκνωτή ρυθμιζόμενης με μεγάλη ακρίβεια σύνθετης αντίστασης

$$Z_3 = R_3 + 1/j\omega C_3$$

που χρησιμοποιείται για την εξισορρόπηση της άγνωστης επαγωγής



Μέτρηση σύνθετης αντίστασης πηνίου με γέφυρα Hay

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη
ισοροπίας

$$Z_X Z_3 = Z_2 Z_4$$

τις τιμές αντιστάσεων των στοιχείων
της γέφυρας

$$Z_X = R_X + j\omega L_X$$

$$Z_2 = R_2$$

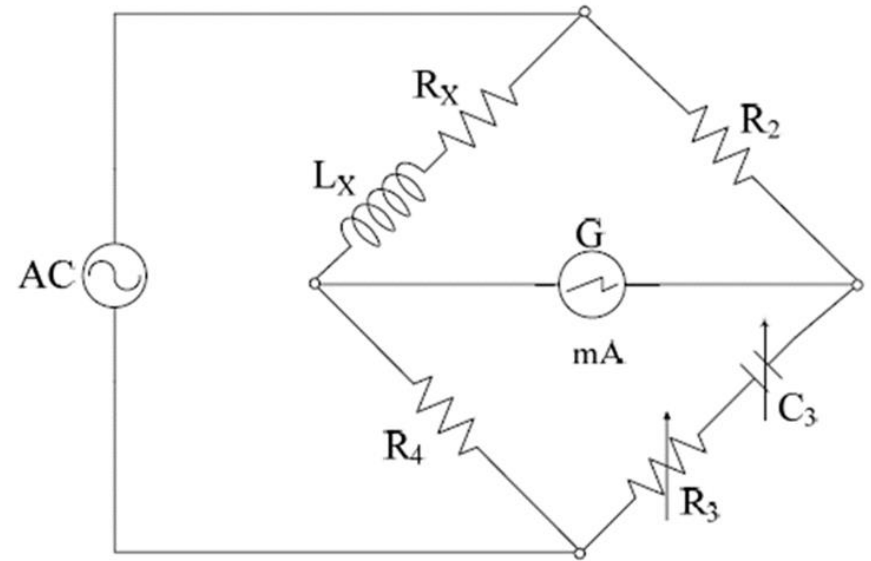
$$Z_3 = R_3 + 1/j\omega C_3$$

$$Z_4 = R_4$$

προκύπτουν

$$R_X = \frac{\omega^2 C_3^2 R_2 R_3 R_4}{1 + \omega^2 C_3^2 R_3^2}$$

$$L_X = \frac{R_2 R_4 C_3}{1 + \omega^2 C_3^2 R_3^2}$$



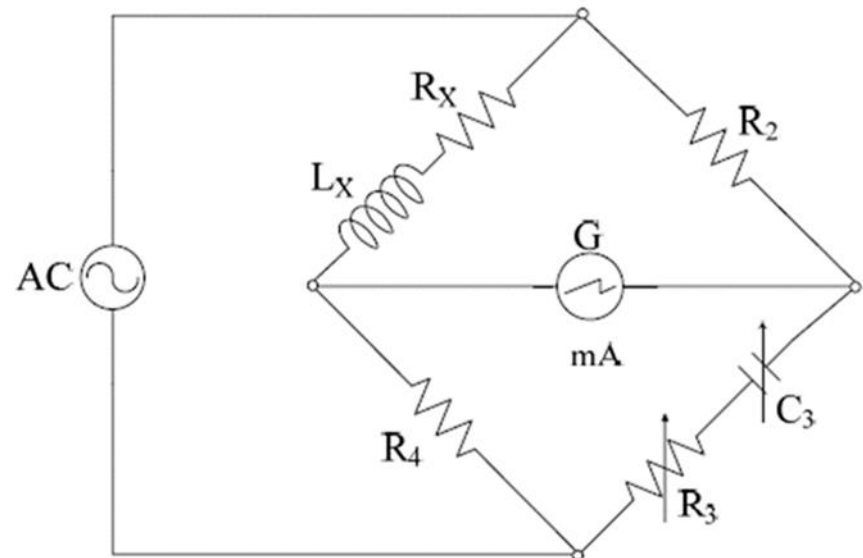
Υπολογισμός συντελεστή απωλειών πηνίου με γέφυρα Hay

- Συντελεστής απωλειών

$$\alpha = \frac{R_X}{\omega L_X} = \omega R_3 C_3$$

- Συντελεστής ποιότητας

$$Q = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega R_3 C_3}$$





Γέφυρα Wheatstone για αισθητήρες αντίστασης

Γέφυρα Wheatstone για χρήση με αισθητήρες αντιστάσης

Συνιστά μια βελτιωμένη τεχνική για τη μέτρηση της ωμικής αντίστασης R_m ενός αισθητήρα.

R_m η τιμή αντίστασης του αισθητήρα (π.χ., RTD ή πιεζοαντίσταση)

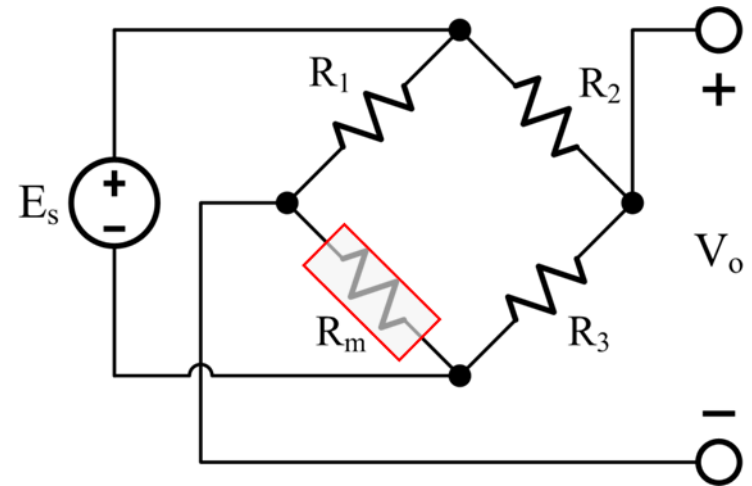
$$R_m = R_0 + \Delta R_m$$

όπου,

R_0 η (αρχική) τιμή της αντίστασης του αισθητήρα (π.χ., η αντίσταση σε $\theta = 0^\circ\text{C}$) και

ΔR_m η μεταβολή της αντίστασης με τη μεταβολή

- της θερμοκρασίας για την περίπτωση αισθητήρα RTD
- της παραμόρφωσης για την περίπτωση αισθητήρα strain gauge (πιεζοαντίσταση)

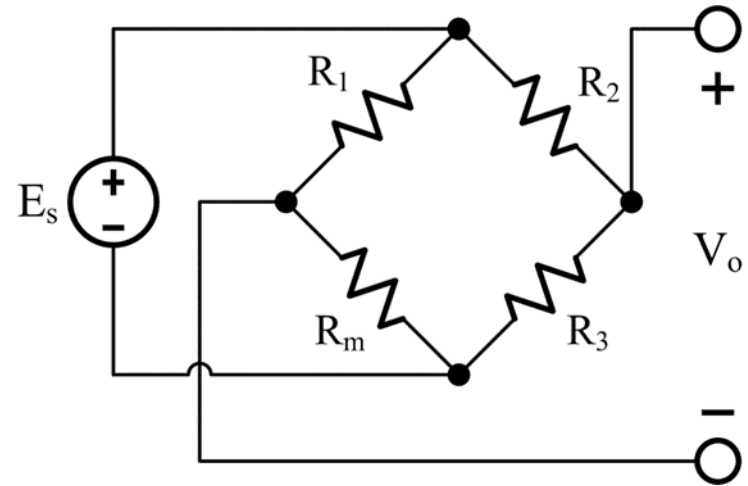


Πρόβλημα

Αποδείξτε ότι, γενικά, η τάση εξόδου V_o της γέφυρας της εικόνας δίνεται από τη σχέση

$$V_o = \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_m}{R_m + R_1} \right) E_s$$

Υπόδειξη: Βλ., Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι, κεφ. 4



Μέτρηση αισθητήρα αντίστασης με γέφυρα Wheatstone

- Τάση εξόδου της γέφυρας

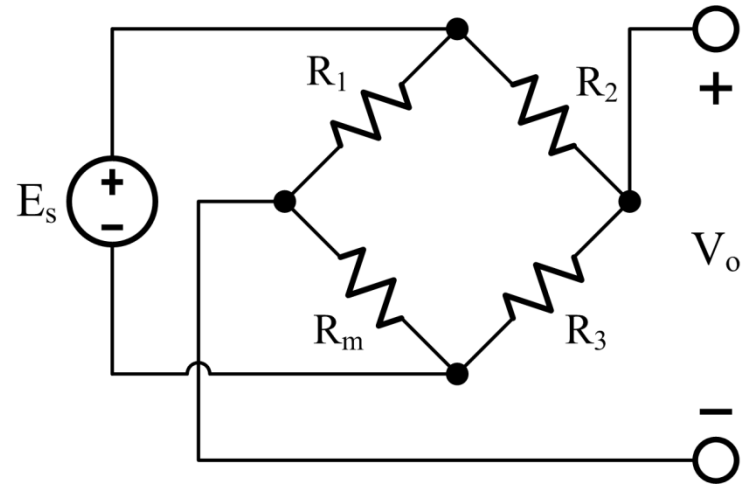
$$V_o = \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_m}{R_m + R_1} \right) E_s, \quad (1)$$

- Αντίσταση αισθητήρα (π.χ., RTD ή πιεζοαντίσταση)

$$R_m = R_0 + \Delta R_m$$

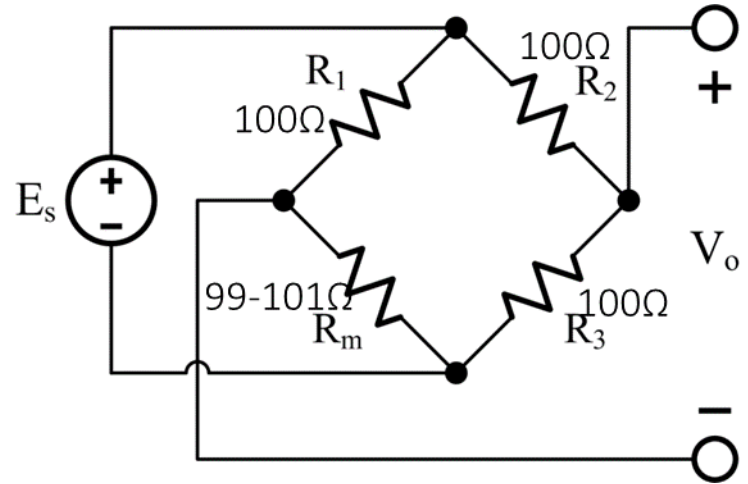
- Επιλέγοντας $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$ και αντικαθιστώντας στην (1), προκύπτει, για μικρές τιμές της σχετικής μεταβολής $\delta = \frac{\Delta R}{R_0}$ της αντίστασης του αισθητήρα ($\delta \leq 1$),

$$V_o = -\frac{E_s}{4} \cdot \delta$$



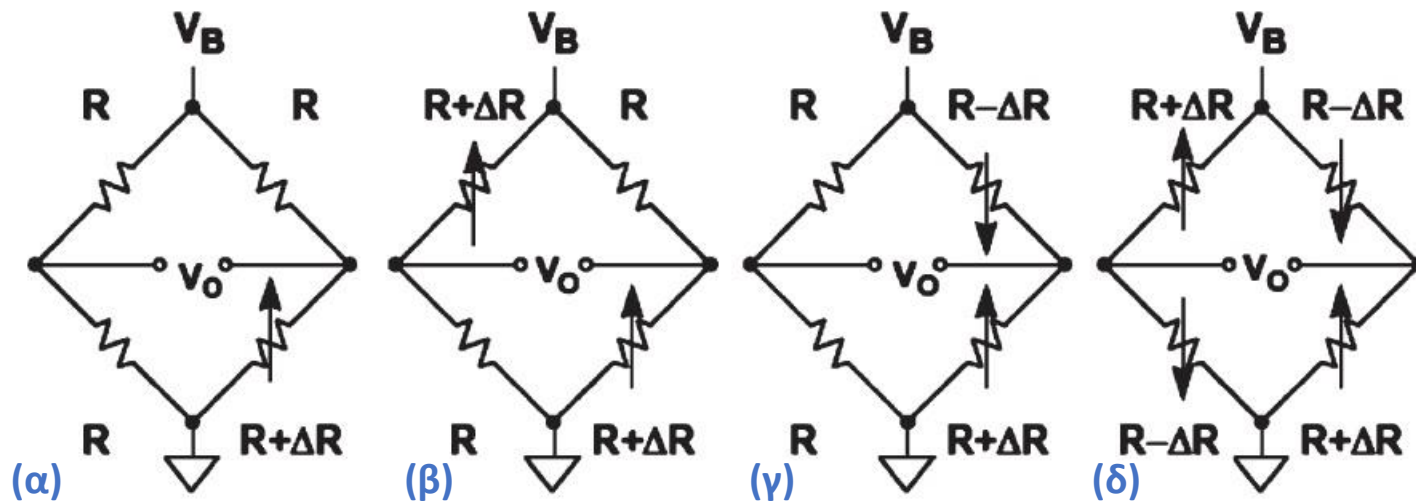
Πρόβλημα

- (α) Υπολογίστε και σχεδιάστε την τάση εξόδου V_o σαν συνάρτηση της τιμής αντίστασης R_m του αισθητήρα στο διάστημα ($99\Omega - 101\Omega$)
- (β) Αποδείξτε ότι, για $\delta \ll 1$, η έξοδος της γέφυρας είναι γραμμική.



Γέφυρα Wheatstone για αισθητήρες αντίστασης (συνέχεια)

- Σε πολλές εφαρμογές γεφυρών, μπορεί να υπάρχουν δύο ή τέσσερις αισθητήρες συνδεδεμένοι των οποίων η αντίσταση μεταβάλλεται.
- Οι τέσσερις πιο συνηθισμένες διατάξεις φαίνονται στην παρακάτω εικόνα (“Sensor Technology Handbook”, ed. J.S. Wilson)



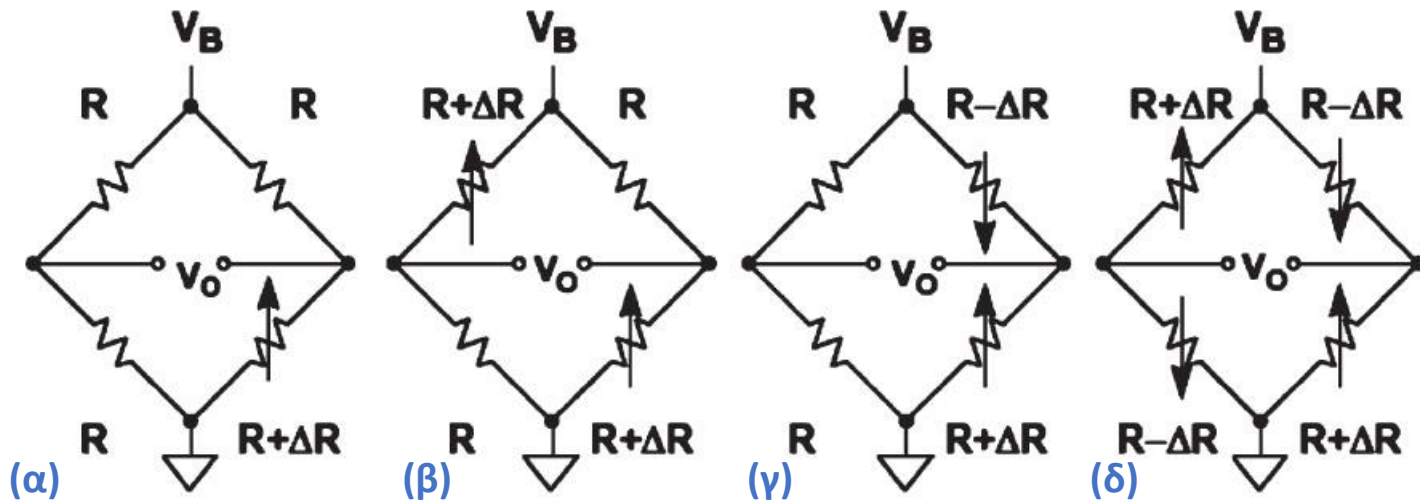
Πρόβλημα

Αποδείξτε ότι η τάση εξόδου στις περιπτώσεις γεφυρών (β) - (δ) είναι:

$$(\beta) \quad V_o \cong -\frac{V_B}{2} \cdot \delta$$

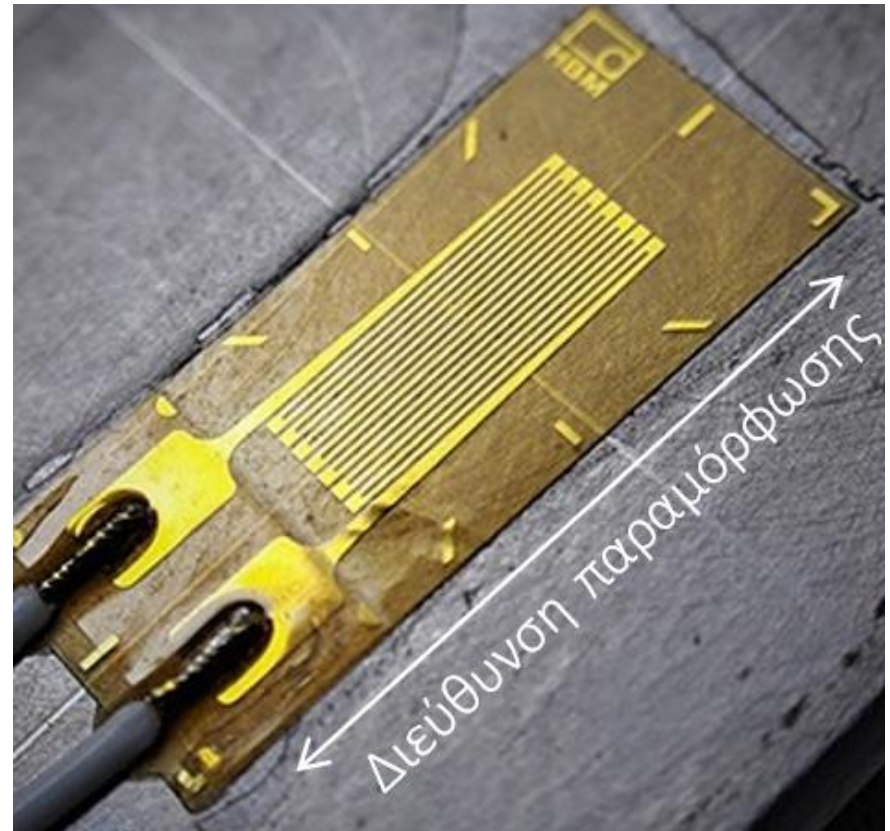
$$(\gamma) \quad V_o = -\frac{V_B}{2} \cdot \delta$$

$$(\delta) \quad V_o = -V_B \cdot \delta$$



Πιεζοαντίσταση (strain gage)

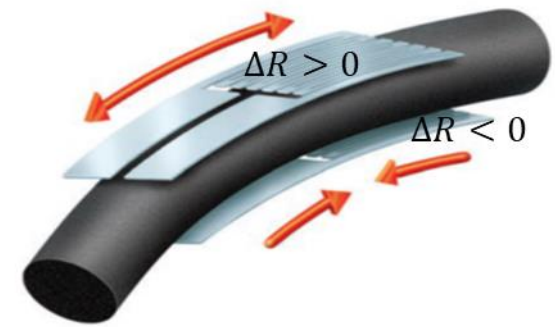
- Είναι ένα πλέγμα λεπτών αγωγών των οποίων η αντίσταση αλλάζει, αυξάνεται όταν επιμηκύνονται ή μειώνεται όταν συρρικνώνονται.
- Εφαρμόζονται σταθερά με κόλλα (ή ειδικό τσιμέντο) πάνω στο σώμα στο οποίο ασκούνται εκτατικές ή συμπιεστικές δυνάμεις παράλληλα στη διεύθυνση παραμόρφωσης
- Με αυτόν το τρόπο επιτυγχάνουμε να μετρήσουμε την παραμόρφωση (επιμήκυνση ή συμπίεση) του στερεού σώματος.



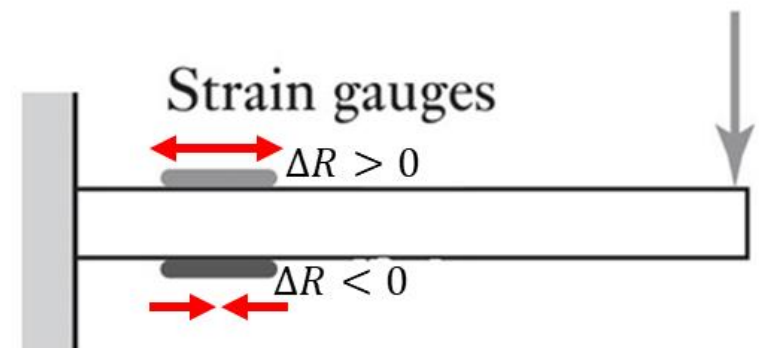
<https://encardio.medium.com/strain-gauge-principle-types-features-and-applications-357f6fed86a5>

Πιεζοαντίσταση ως ευαίσθητος μετρητής γωνίας κάμψης στερεών σωμάτων

- Προκειμένου να μετρηθεί η γωνία κάμψης (bending angle) μεταλλικών σωλήνων ή ράβδων, συνήθως, συνδέονται ζεύγη πιεζοαντιστάσεων στις αντίθετες πλευρές
- Όταν η ράβδος είναι λυγισμένη, οι αγωγοί στη μια πιεζοαντίσταση του ζεύγους γίνονται μακρύτεροι και λεπτότεροι, αυξάνοντας την αντίσταση ($\Delta R > 0$), ενώ στην άλλη γίνονται κοντύτεροι και παχύτεροι, μειώνοντας την αντίσταση ($\Delta R < 0$).



Nilsson and Riedel Electric Circuits
Global 9th ed



Παραμόρφωση: το αποτέλεσμα της μηχανικής τάσης

- **Μηχανική τάση** (stress), σ , είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφανείας που ασκείται σε ένα σώμα:

$$\sigma = F/A$$

- Εκφράζεται σε μονάδες πίεσης, $N/m^2 = Pa$
- Σχέση μεταξύ των μονάδων πίεσης

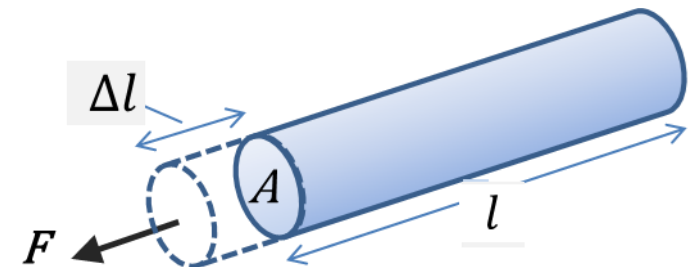
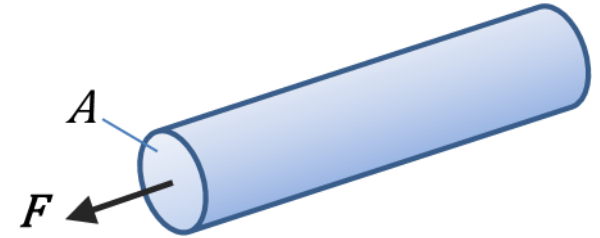
$$Pa = 10^{-5} \text{ bar} = 7.5 \times 10^{-3} \text{ Torr} = 1.45 \times 10^{-4} \text{ psi}$$

- Αποτέλεσμα της μηχανικής τάσης, είναι η (μηχανική) **παραμόρφωση** του σώματος (επιμήκυνση ή συμπίεση)
- **Παραμόρφωση** (strain), ε , είναι η σχετική μεταβολή του μήκους του σώματος

$$\varepsilon = \Delta l/l$$

- Εκφράζεται σε *ppm* ή microstrains ($\mu\varepsilon$)

$$1\mu\varepsilon = 1 \text{ ppm} = 10^{-6} \frac{mm}{mm} \quad \text{ή} \quad 10^{-6} \frac{cm}{cm} \quad \text{ή} \quad = 10^{-6} \frac{m}{m} \quad \text{κ.ο.κ.}$$



Σχέση μηχανικής τάσης – παραμόρφωσης

- Η μηχανική τάση, σ , και το αποτέλεσμα της, η μηχανική παραμόρφωση (strain), ε , συνδέονται με τη σχέση (ανάλογο του νόμου Hook για τα ελατήρια):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

όπου,

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young (Young's modulus) του υλικού

- έχει διαστάσεις πίεσης (όπως η μηχανική τάση)
- μετριέται, συνήθως, σε Gpa ή Mpsi.

Παράδειγμα

Παραμόρφωση $\varepsilon = 300\mu\epsilon$ σημαίνει ότι το μήκος του σώματος έχει μεταβληθεί κατά 300 εκατομμυριοστά ($300 \cdot 10^{-6} = 3 \times 10^{-4} = 0.0003$) του αρχικού του μήκους,

- Π.χ.: αν το αρχικό μήκος του σώματος είναι 45cm, η παραμόρφωσή του θα είναι

$$0,0003 \times 45 \text{ cm} = 0.0135 \text{ cm} = 0.135 \text{ mm} \text{ ή } 135 \mu\text{m}$$

δηλαδή, το μήκος του σώματος θα γίνει

$$45.0135 \text{ cm} \quad (\text{αν επιμηκυνθεί})$$

$$\text{ή } 44.9865 \text{ cm} \quad (\text{αν συμπιεστεί})$$

Το φαινόμενο της πιεζοαντίστασης

- Η κανονικοποιημένη μεταβολή $\Delta R/R$ της αντίστασης του τεταμένου (strained) σύρματος είναι γραμμική συνάρτηση της παραμόρφωσης, $\varepsilon = \Delta l/l$,
- μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{\Delta R}{R} = S_e \varepsilon$$

- όπου, S_e η ευαισθησία (sensitivity) ή συντελεστής (gauge factor, GF) της πιεζοαντίστασης.
- Η ευαισθησία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μακρύτερος και λεπτότερος και όσο μεγαλύτερη είναι η ειδική αντίσταση του αγωγού από τον οποίο είναι κατασκευασμένος
- Για μεταλλικά σύρματα η τιμή S_e κυμαίνεται από 2 έως 6.
- Για μετρητές ημιαγωγών, η τιμή S_e είναι πολύ υψηλότερη, μεταξύ 40 και 200 (γιατί;)

Πίνακας τιμών του συντελεστή GF ή S_e για διάφορα υλικά

Υλικό	GF
Λευκόχρυσος (Pt 100%)	6.1
Λευκόχρυσος-Ιρίδιο (Pt 95%, Ir 5%)	5.1
Λευκόχρυσος-Βολφράμιο (Pt 92%, W 8%)	4.0
Isoelastic (Fe 55.5%, Ni 36%, Cr 8%, Mn 0.5%)	3.6
Constantan (Ni 45%, Cu 55%)	2.1
Νικέλιο-Χρώμιο (Ni 80%, Cr 20%)	2.1
Karma (Ni 74%, Cr 20%, Al 3%, Fe 3%)	2.0
Armour D (Fe 70%, Cr 20%, Al 10%,)	2.0
Monel (Ni 67%, Cu 33%)	1.9
Manganin (Cu 55%, Mn 12%, Ni 4%)	0.47
Νικέλιο (Ni 100%)	-12.1
Karma (Ni 74%, Cr 20%, Al 3%, Fe 3%)	2.0

Σ.Ι. Λουτρίδης, «Τεχνολογία Μετρήσεων και Αισθητήρων», εκδόσεις ΙΩΝ

Παράδειγμα

Ποια είναι η μεταβολή αντίστασης πιεζοαντίστασης, ονομαστικής τιμής 100Ω και συντελεστή 2.0, σε παραμόρφωση 0.001;

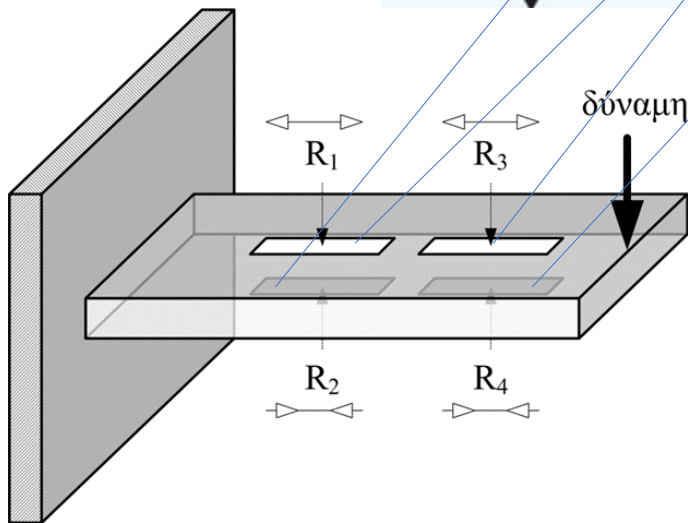
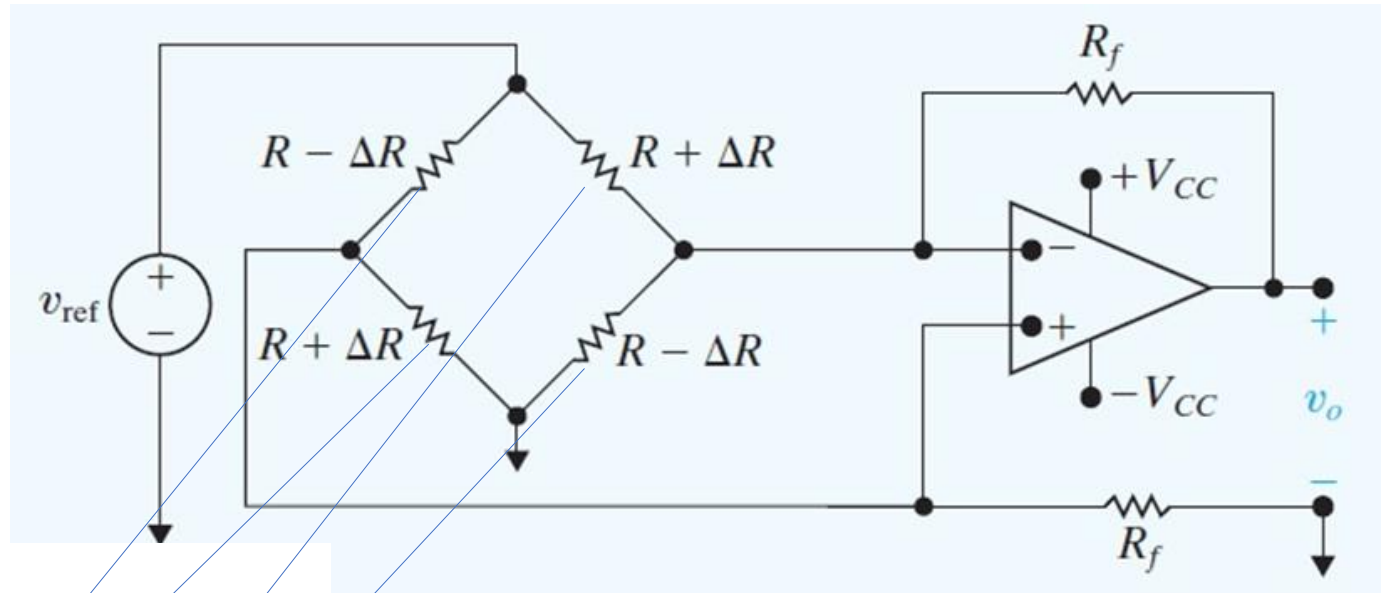
Η σχετική μεταβολή αντίστασης είναι

$$\frac{\Delta R}{R} = GF \cdot \varepsilon = 2 \cdot 0.001 = 0.002$$

Επομένως, η απόλυτη μεταβολή της αντίστασης είναι

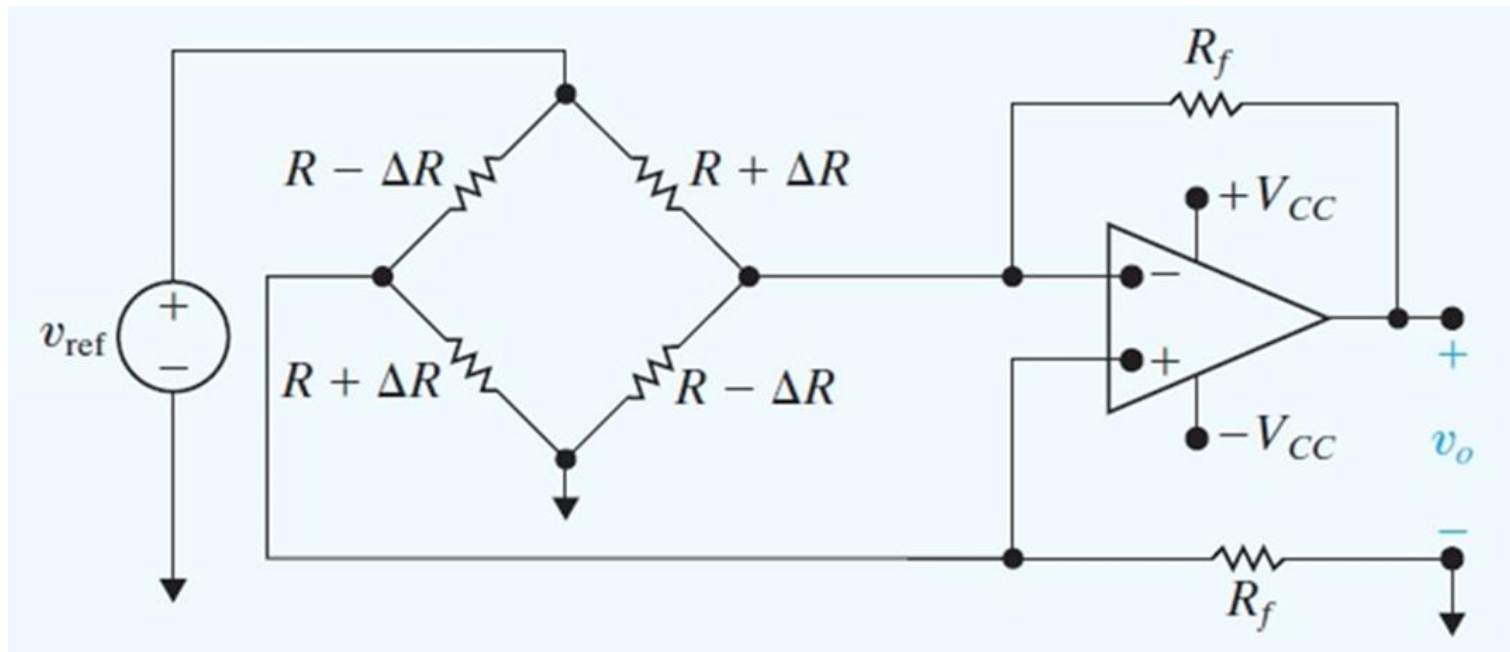
$$\Delta R = 0.002 \cdot R = 0.002 \cdot (100 \Omega) = 0.2 \Omega$$

Ένα κύκλωμα γέφυρας – τελεστικού ενισχυτή για τη μέτρηση παραμορφώσεων σε ελαστικά στερεά



Παράδειγμα (βλ. Nilsson and Riedel Ηλεκτρικά Κυκλώματα, 9^η έκδ. κεφ. 5, σελ. 142)

Αναλύστε το κύκλωμα της εικόνας και βρείτε τη σχέση μεταξύ της τάσης εξόδου v_o και της μεταβολής ΔR στην αντίσταση των τεσσάρων όμοιων πιεζοαντιστάσεων.



Απάντηση

$$v_o \approx \frac{R_f}{R} 2\delta v_{ref}$$

(για τη λύση, βλ. Nilsson and Riedel Ηλεκτρικά Κυκλώματα, 9^η έκδ. κεφ. 5, σελ. 142)

Πρόβλημα

Υποθέστε ότι οι πιεζοαντιστάτες στη γέφυρα της εικόνας στο προηγούμενο παράδειγμα έχουν τιμή $120\Omega \pm 1\%$. Η τροφοδοσία του τελεστικού ενισχυτή είναι $\pm 15V$ και η τάση αναφοράς, v_{ref} , λαμβάνεται από τη θετική τροφοδοσία.

- α) Υπολογίστε την τιμή της R_f έτσι ώστε όταν η πιεζοαντίσταση που επιμηκύνεται φτάνει στο μέγιστο μήκος της, η τάση εξόδου να είναι 5 V.
- β) Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να μετρήσουμε με ακρίβεια μεταβολές των 50 mV στην τάση εξόδου. Ποια μεταβολή στην αντίσταση των πιεζοαντιστάσεων μπορεί να ανιχνευθεί σε milliohms;