

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2<sup>Η</sup>

ΜΕΡΟΣ Δ΄

AC κυματομορφές τάσης

# Κυματομορφές μεταβαλλόμενης τάσης

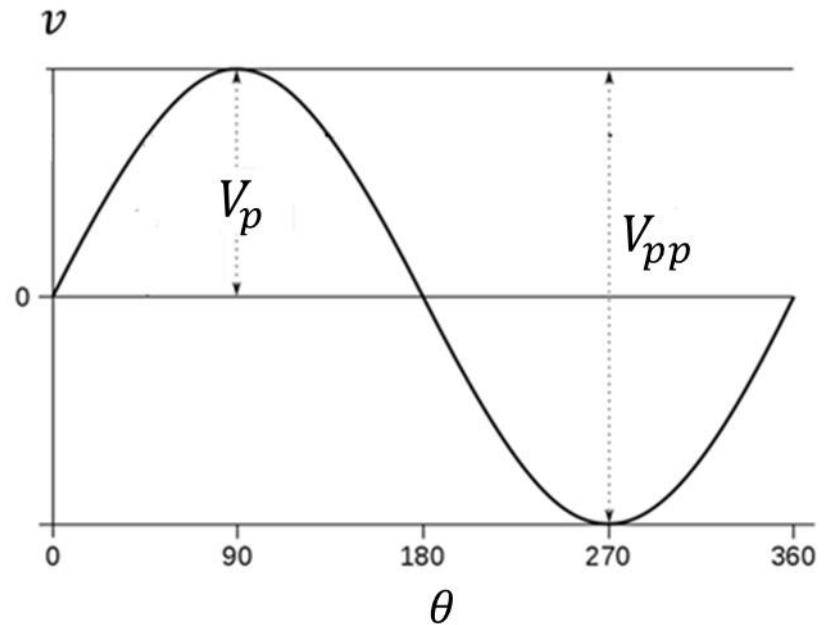
- AC (Alternating Current)
- Σύνθετες κυματομορφές τάσης
  - Ημίτονο + DC,
  - Αρμονικά παραμορφωμένο ημίτονο.
  - Μη ημιτονοειδείς κυματομορφές τάσης (που μπορούν να αναλυθούν σε σειρά Fourier)

# Ημιτονοειδής τάση: Η θεμελιώδης μορφή AC τάσης

Ημιτονοειδής τάση (sine wave): ημιτονοειδής χρονική εξάρτηση της στιγμιαίας τιμής

$$v = V_p \sin \theta$$

- $v = v(t)$  η στιγμιαία τιμή
- $V_p$  το πλάτος της τάσης σε volt
- $\theta = \frac{2\pi}{T} t$  η φάση της τάσης (γωνία σε rad (0 -  $2\pi$ ))
- $T$  η περίοδος σε s
- Συχνότητα  $f = 1/T$  σε Hz



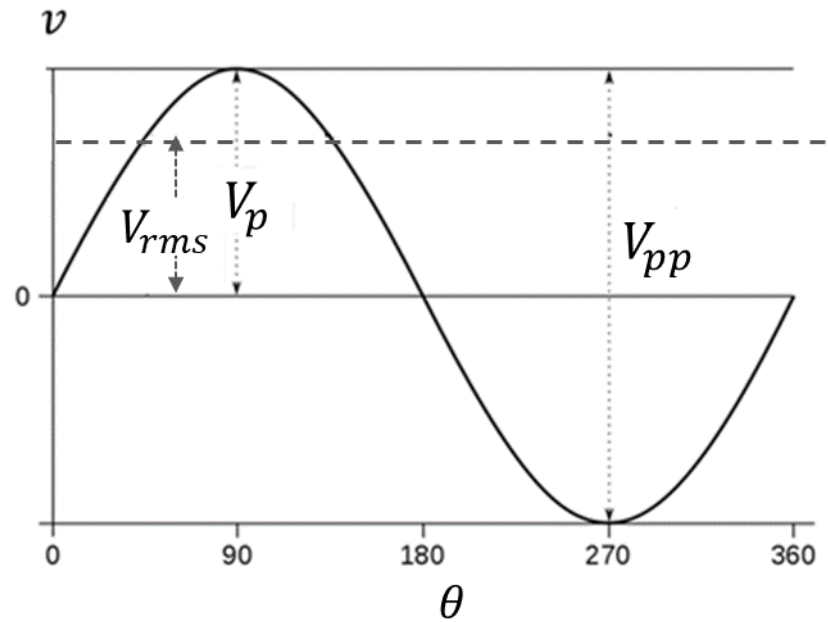
# RMS τιμή τάσης

- RMS (root mean square) ή ενεργός τιμή

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} v^2 d\tau}$$

- RMS τιμή ημιτονοειδούς τάσης

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \cong 0.707 \cdot V_p$$



## Σχέση rms τιμής τάσης και ισχύος

Μια, γενικά, μεταβαλλόμενη τάση ενεργού τιμής  $V_{\text{rms}}$  παράγει την ίδια ισχύ με την dc τάση,  $V_{\text{dc}}$ , όταν  $V_{\text{rms}} = V_{\text{dc}}$

## Άσκηση 1

Υπολογίζοντας το σχετικό ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι η rms τιμή μιας καθαρά ημιτονοειδούς τάσης  $v = V_p \sin(2\pi/T)t$ , με περίοδο  $T$ , ισούται με  $V_p/\sqrt{2}$ .

## Εφαρμογή

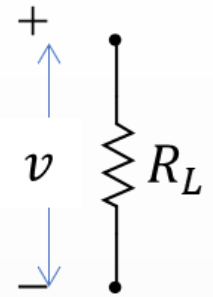
Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 'Advanced DC-RMS Measurement.exe' την οποία μπορείτε να βρείτε κατεβάζοντας το 'DC και RMS τιμές βασικών κυματομορφών τάσης' από το φάκελο 'Πολυμέσα' της σελίδας του μαθήματος στο eclass, επιβεβαιώστε 'πειραματικά' τη σχέση  $V_{rms} = V_p/\sqrt{2}$  για την περίπτωση μιας ημιτονοειδούς τάσης πλάτους 1 V, συχνότητας 10 Hz.

Ρυθμίσεις: στο μενού *signal type* επιλέξτε *Sine Wave*. Με τα κουμπιά *frequency* και *amplitude* δώστε τις τιμές 10 (Hz) και 1 (V), αντίστοιχα.

Δείτε την παραγόμενη κυματομορφή στην 'οθόνη' *Signal Waveform* και διαβάστε τις rms, dc και rss τιμές της στους αντίστοιχους δείκτες.

## Άσκηση 2

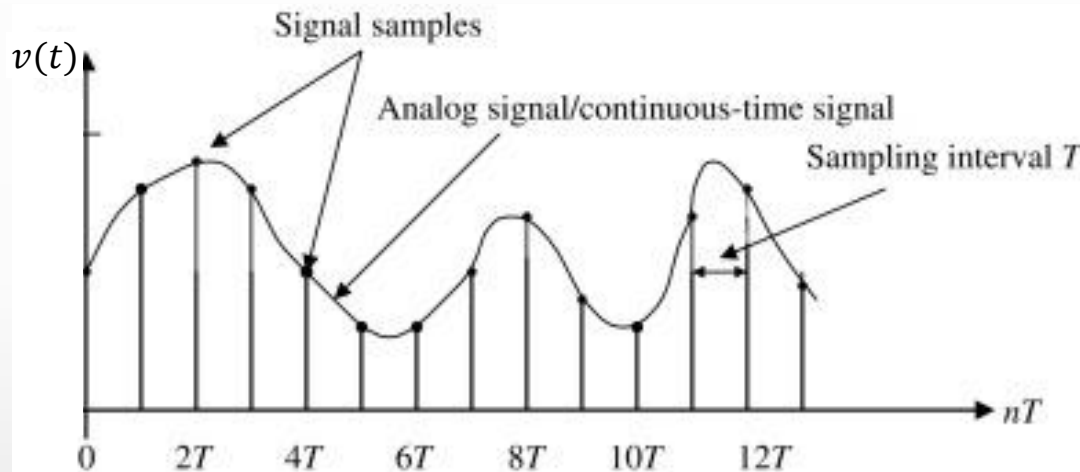
Δεδομένου ότι η στιγμιαία τιμή  $p$  της ισχύος, που καταναλώνεται σε ένα φορτίο  $R_L$ , στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται τάση στιγμιαίας τιμής  $v$ , είναι εξ' ορισμού  $p = v^2/R_L$ , αποδείξτε ότι, στην περίπτωση ημιτονοειδούς τάσης, η μέση ισχύς  $\bar{p}$ , δηλαδή, η ισχύς που καταναλώνεται στη διάρκεια μιας περιόδου, είναι  $\bar{p} = V_{rms}^2/R_L = V_p^2/2R_L$ , όπου,  $V_p$  και  $V_{rms}$  το πλάτος και η rms τιμή, αντίστοιχα, της ημιτονοειδούς τάσης.



# Όργανα μέτρησης AC τάσης

Ψηφιακά πολύμετρα ή πολύμετρα δειγματοληψίας (sampling voltmeters)

- Αναπαράγουν την κυματομορφή ενός αναλογικού σήματος τάσης (analog signal) από ακριβή δείγματα (signal samples) των στιγμιαίων τιμών της

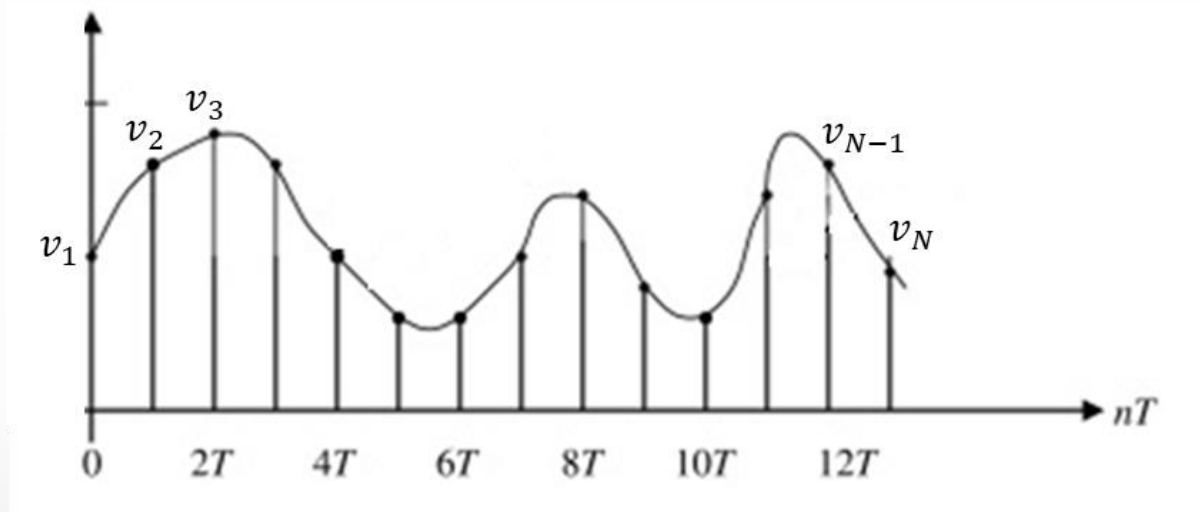


<https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/shannon-sampling-theorem>

- Διάστημα δειγματοληψίας (sampling interval),  $T$ , είναι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων (μετρήσεων)
- Η μέθοδος αυτή είναι η πλέον χρήσιμη (ακριβής και απλούστερη) για  $f < 5 \text{ kHz}$
- Είναι μακράν η βέλτιστη για  $f < 5 \text{ Hz}$

## DC και RMS τιμές της AC τάσης με DMM

Από ένα σύνολο  $N$  δειγμάτων (μετρήσεων)  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}, v_N$  τάσης η DC και RMS τιμές υπολογίζονται



$$V_{dc} = \bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i = \frac{1}{N} (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N)$$

$$V_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_N^2)}$$



## Άσκηση 3

Στο αρχείο excel 'Signal Measurement File 1' στο φάκελο Έγγραφα > Θεωρία στη σελίδα του μαθήματος στο eclass μπορείτε να βρείτε τη καταγραφή 1000 διαδοχικών μετρήσεων τάσης που έγιναν με τη βοήθεια ενός παλμογράφου. Ο ρυθμός δειγματοληψίας (sample rate) του παλμογράφου ήταν 10000 Samples/s.

- (α) Χρησιμοποιώντας το ίδιο αυτό φύλο excel ή οποιοδήποτε προγραμματιστικό περιβάλλον της επιλογής σας (π.χ., Matlab), δώστε το γράφημα της τάσης του σήματος.
- (β) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις στην προηγούμενη σελίδα, υπολογίστε τις μέση και ενεργό τιμές του μετρηθέντος σήματος.
- (γ) Ποια είναι η συχνότητα του σήματος;

## Άσκηση 4

Επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) και (β) της Άσκησης 3 για τις μετρήσεις που είναι καταγεγραμμένες στα αρχεία excel 'Signal Measurement File 2' και 'Signal Measurement File 3' στο φάκελο *Έγγραφα > Θεωρία* στη σελίδα του μαθήματος στο eclass.

Σημείωση: Προσέξτε ότι στα αρχεία αυτά excel η 1<sup>η</sup> στήλη αναφέρεται στο χρόνο. Τροποποιήστε κατάλληλα τον 'οριζόντιο' άξονα του γραφήματός σας του ερωτήματος (α)

# Τύποι AC βολτομέτρων

(AC Meter Types)

- Βολτόμετρα μέσης τιμής (Average responding meters)
- Βολτόμετρα μέγιστης τιμής (Peak reading meters)
- Βολτόμετρα αληθούς – RMS (True RMS or RMS responding meters)

Mark Finch “AC/DC Transfer (AC Voltage)”, MFT Course Profile Rev.: 9/05 Eng ©Fluke Precision Measurement Ltd

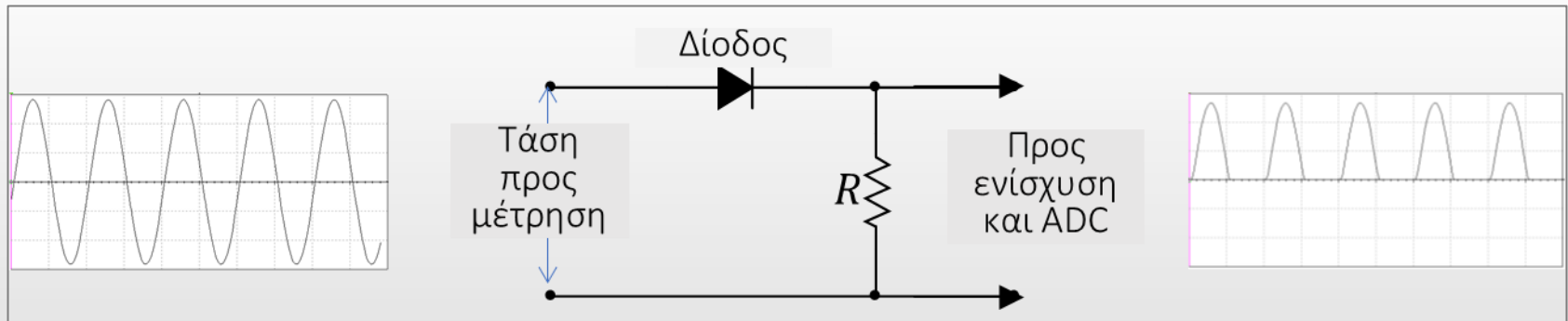
# Τύποι AC βολτομέτρων - Βολτόμετρα μέσης τιμής

- Βολτόμετρα μέσης τιμής (Average responding meters)
  - Ο συνηθέστερος τύπος
  - Πρακτικά, μετρούν τη μέση ανορθωμένη τιμή

- Για μια περιοδική ημιανορθωμένη τάση

$$V_{avg} = \frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} v d\tau + \int_{T/2}^T 0 d\tau \right)$$

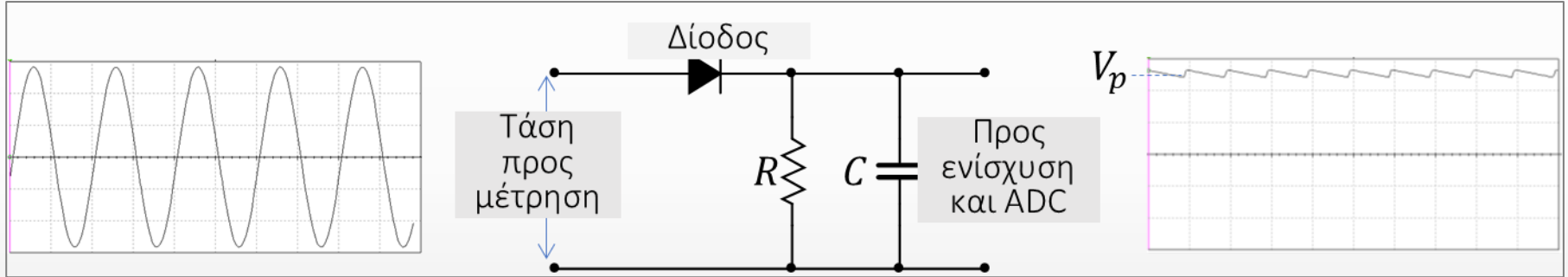
- Για μια καθαρά ημιτονοειδή ημιανορθωμένη τάση  $V_{avg} = V_p/\pi = \sqrt{2} \cdot V_{rms}/\pi$



- Η κλίμακα βαθμονομείται στην τιμή RMS,  $V_{rms} = 0.450 \cdot V_{avg}$ . Η αποδοχή της ακρίβειας μέτρησης με βολτόμετρο μέσης τιμής βασίζεται στο γεγονός ότι, πρακτικά, οι περισσότερες προς μέτρηση εναλλασσόμενες τάσεις έχουν ημιτονοειδή μορφή.

# Τύποι AC βολτομέτρων - Βολτόμετρα μέγιστης τιμής

- Βολτόμετρα μέγιστης τιμής (Peak reading meters)
  - Η διαφορά τους από τα μέσης τιμής είναι μόνο ότι χρησιμοποιείται ένας πυκνωτής σαν χαμηλοδιαπερατό φίλτρο

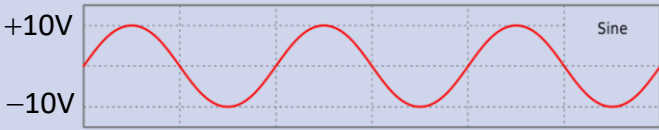
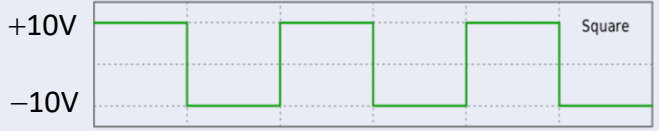




- Για καθαρά ημιτονοειδή ημιανορθωμένη τάση, η κλίμακα βαθμονομείται στην τιμή RMS.

$$V_{rms} = 0.707 \cdot V_p$$

## Άσκηση 5 Σφάλματα βολτομέτρου μέγιστης τιμής

Για τις τέσσερις βασικές μορφές κυματομορφών, που αναφέρονται στην 1<sup>η</sup> στήλη του παρακάτω πίνακα, όλες με το ίδιο πλάτος 10 V, υπολογίστε την rms τάση που θα δείξει ένα βολτόμετρο μέγιστης τιμής και το % σχετικό σφάλμα ως προς την πραγματική τιμή. Συμπληρώστε τον πίνακα αναλόγως

Μετρούμενη κυματομορφή	Βολτόμετρο true-rms	Βολτόμετρο μέγιστης τιμής
	7.07 V ακριβές	7.07 V ακριβές
	10 V ακριβές	7.07 V 30% χαμηλότερη
		
		

# Τύποι AC βολτομέτρων – True-RMS βολτόμετρα

- Στην περίπτωση μη-ημιτονοειδών κυματομορφών, ακριβής υπολογισμός της RMS τάσης με τη βοήθεια βολτόμετρων μέσης ή μέγιστης τιμής δεν είναι δυνατή.
- Τύποι true-RMS βολτομέτρων
  - Ηλεκτρονικά (Electronic true-RMS)
  - Θερμικά (Thermal true-RMS)

## Ηλεκτρονικά true-rms βολτόμετρα

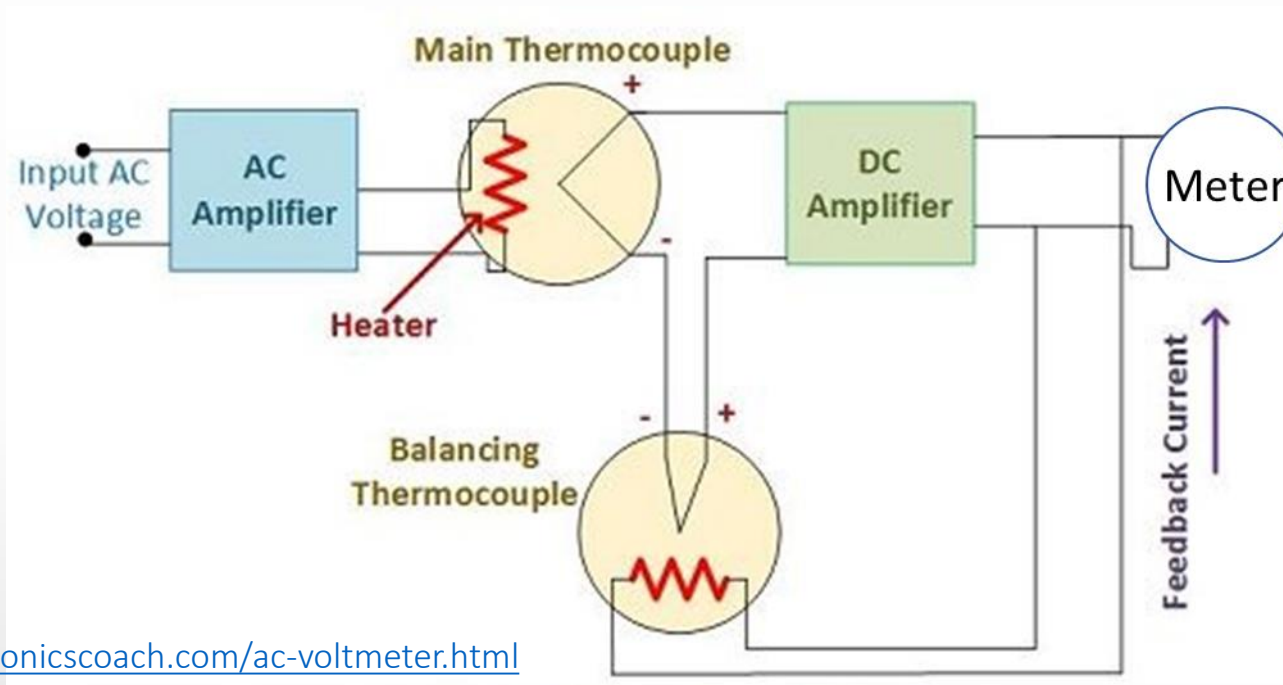
1. Λαμβάνουν, με ελεγχόμενο ρυθμό, N δείγματα της τάσης ( $v_1, v_2, \dots, v_N$ )
2. Ψηφιοποίηση των N δειγμάτων

3. Υπολογισμός, άμεσα, της μέσης τετραγωνικής τιμής  $V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}$

Αιτία ανακρίβειας: ρυθμός δειγματοληψίας που δεν είναι επαρκώς υψηλός για καλύψει το πλήρες φασματικό περιεχόμενο της μετρούμενης τάσης (π.χ., υψίσυχνες ή παλμικές κυματομορφές)

## Θερμικά true-rms βολτόμετρα

- Με τη βοήθεια θερμοζευγών (thermocouples), μετράται άμεσα η θερμική ισχύς ( $P_{thermal}$ ) που αναπτύσσεται σε καλά καθορισμένη ωμική αντίσταση (heater).



<https://electronicscoach.com/ac-voltmeter.html>

- Εξ' ορισμού, η RMS τιμή της AC τάσης σε ένα φορτίο είναι εκείνη η DC τάση που αναπτύσσει την ίδια θερμότητα στο φορτίο.

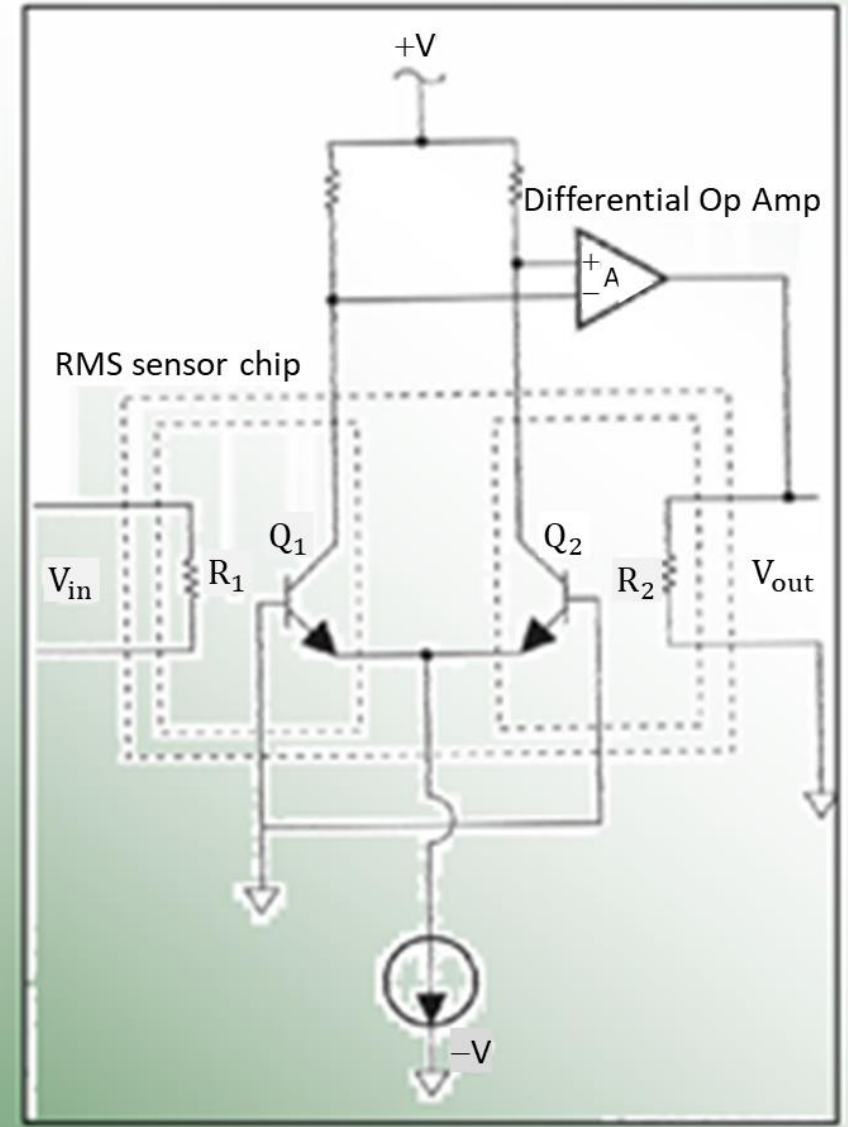
$$P_{thermal} = V_{rms}^2 / R_L$$

- Η RMS τιμή τάσης προκύπτει άμεσα από τη μετρούμενη θερμική ισχύ.



# Ο βασικός αισθητήρας RMS

- $V_{in}^2/R_1$  θερμαίνει την  $R_1$
- Η θερμότητα στην  $R_1$  αυξάνει τη θερμοκρασία της βάσης του  $Q1$ , αυξάνοντας το ρεύμα συλλέκτη του  $Q1$
- Αυξημένο ρεύμα στο συλλέκτη του  $Q1$  αναιρεί την ισορροπία στην αναστρέφουσα (-) είσοδο του τελεστικού ενισχυτή (Op-Amp)
- Η έξοδος  $V_{out}$  του ενισχυτή θερμαίνει την  $R_2$ , προκαλώντας αύξηση του ρεύματος στο συλλέκτη του  $Q2$ , φέρνοντας πάλι σε ισορροπία την έξοδο του τελεστικού ενισχυτή.
- Στην ισορροπία,  $V_{in} = V_{out}$ . Η τάση  $V_{out}$  είναι μια DC τάση που έχει την ίδια ισχύ με την  $V_{in}$



# Σύνθετες ημιτονοειδείς κυματομορφές τάσης

(Composite sinusoidal voltage waveform)

- Η βασική συνιστώσα μιας σύνθετης ημιτονοειδούς τάσης είναι ένα κύμα καθαρού ημιτόνου (pure sine wave)
- Πρόσθετες συνιστώσες μπορεί να είναι
  - dc τάσεις ή/και
  - ένας αριθμός επιπλέον καθαρών ημιτόνων των οποίων οι συχνότητες είναι αρμονικά πολλαπλάσια της βασικής συνιστώσας.

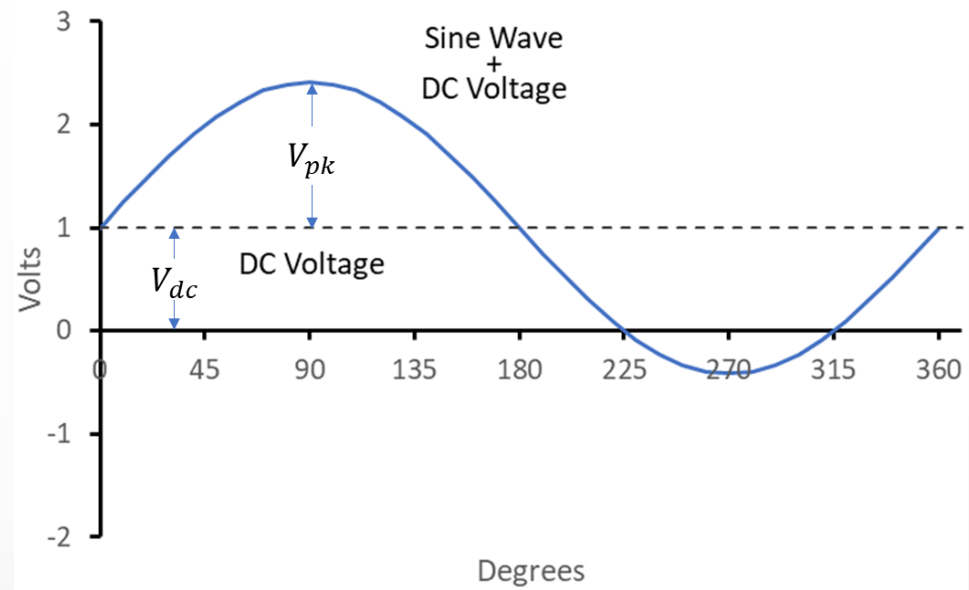
## Ημίτονο + DC

Η rms τιμή μιας κυματομορφής με dc συνιστώσα ισούται με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων (square-root-of-the-sum-of-the-squares (rss)) των συνιστωσών της.

$$V_{rss} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{rms}^2} *$$

$$V_{dc} = \eta \text{ dc τάση}$$

$$V_{rms} = \eta \text{ rms τιμή του ημιτόνου} = V_{pk} / \sqrt{2}$$



\* Συχνά (όπως σε εγχειρίδια οργάνων) η rss τιμή της σύνθετης τάσης αναφέρεται απλά σαν  $V_{rms}$

## Μέτρηση σύνθετης τάσης (Ημίτονο + DC)

$$V_{rss} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{rms}^2}$$

- RMS και μέση τιμή ενός καθαρού ημιτόνου αυξάνουν με την dc συνιστώσα του.
- Ένας ψηφιακός παλμογράφος, έχει τη δυνατότητα εμφάνισης και μέτρησης της συνολικής κυματομορφής (Sine Wave + DC Voltage) ή μόνο της ac συνιστώσας (Sine Wave) στις επιλογές εισόδου DC και AC, αντίστοιχα.
- Ένα true-rms ψηφιακό πολύμετρο (true-rms DMM) σε λειτουργία dc-coupled ac voltage (αν διαθέτει) μετράει αυτές τις συνιστώσες με ακρίβεια.
- Σχεδόν όλα τα όργανα μέσης τιμής (average responding meters) 20/44 δεν αποκρίνονται στη dc συνιστώσα (σφάλμα μέτρησης).

## Άσκηση 6

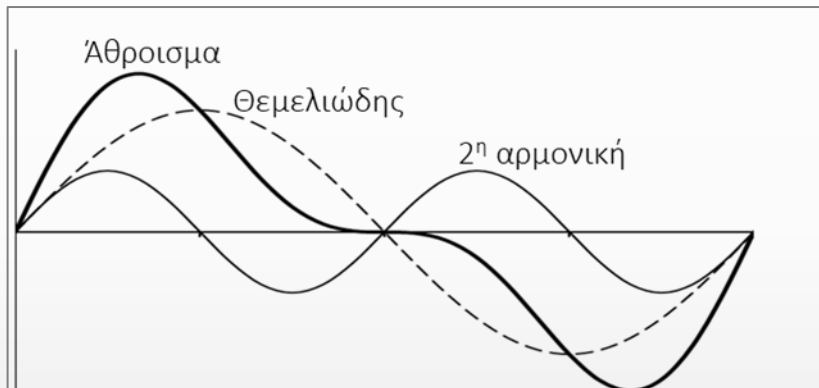
Υπολογίζοντας το σχετικό ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι η rms τιμή μιας σύνθετης τάσης, που συνίσταται στην επαλληλία μιας καθαρής ημιτονοειδούς τάσης ενεργού (rms) τιμής  $V_{rms}$  και μιας συνεχούς συνιστώσας τιμής  $V_{dc}$ , ισούται με

$$V_{r_{ss}}, \text{ όπου, } V_{r_{ss}} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{rms}^2}$$

# Αρμονικά Παραμορφωμένο Ημίτονο

(Harmonically-Distorted Sine wave)

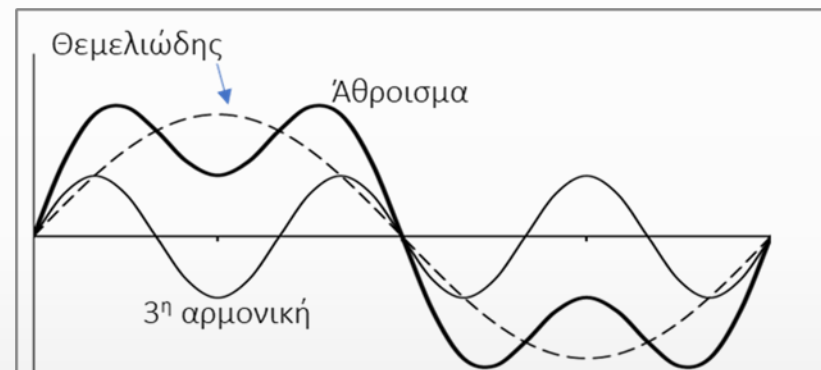
- Περιλαμβάνει ένα **θεμελιώδες** ημίτονο και τις **αρμονικές** του.
- Προσέξτε πόσο δραστικά επηρεάζεται η μορφή της **σύνθετης κυματομορφής (άθροισμα)** από τη σχετική φάση των αρμονικών ως προς τη θεμελιώδη συνιστώσα



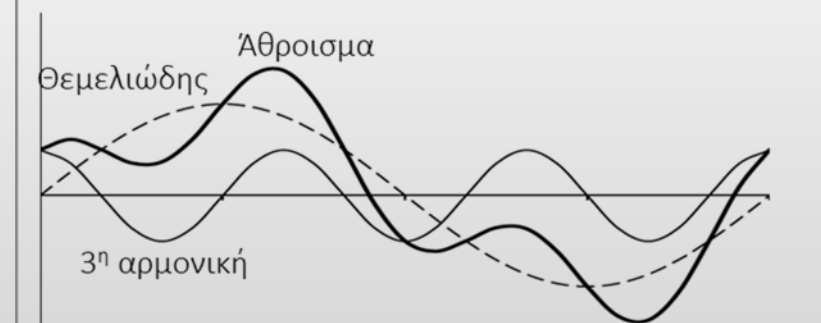
(α) Θεμελιώδης και 2<sup>η</sup> αρμονική σε φάση



(β) Θεμελιώδης και 2<sup>η</sup> αρμονική εκτός φάσης



(γ) Θεμελιώδης και 3<sup>η</sup> αρμονική σε φάση



(δ) Θεμελιώδης και 3<sup>η</sup> αρμονική εκτός φάσης

# Όργανα μέτρησης αρμονικά παραμορφωμένου ημιτόνου

- Ένα true-rms DMM μετράει με ακρίβεια ένα αρμονικά παραμορφωμένο ημίτονο.
- Τα όργανα μέσης τιμής (average responding meters) δεν μετράνε με ακρίβεια αρμονικά παραμορφωμένο ημίτονο (σφάλμα μέτρησης):
  - αγνοούν εντελώς τις άρτιες (2<sup>η</sup>, 4<sup>η</sup>, ...) αρμονικές,
  - η απόκρισή τους είναι συνάρτηση της διαφοράς φάσης μεταξύ θεμελιώδους και αρμονικών.

# Rss τιμή αρμονικά παραμορφωμένου ημιτόνου

- Rss τιμή τάσης κυματομορφής με απλή αρμονική παραμόρφωση

$$V_{rss} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{fund}^2 + V_{harm}^2}$$

$V_{dc}$  η dc τιμή της τάσης (αν υπάρχει)

$V_{fund} = \frac{V_{fund,pk}^2}{\sqrt{2}}$  η rms τιμή του θεμελιώδους ημιτόνου

$V_{harm} = \frac{V_{harm,pk}^2}{\sqrt{2}}$  η rms τιμή του αρμονικού ημιτόνου

- Rss τιμή τάσης κυματομορφής με πεπερασμένο πλήθος αρμονικών

$$V_{rss} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{fund}^2 + V_{harm1}^2 + V_{harm2}^2 + \dots + V_{harmN}^2}$$



## Άσκηση 7

(α) Αποδείξτε ότι η rms τιμή μιας αρμονικά παραμορφωμένης ημιτονοειδούς τάσης, που συνίσταται από μια θεμελιώδη συνιστώσα πλάτους  $V_{fund}$  και  $N$  αρμονικές της με πλάτη  $V_{harm\ i}$ ,  $i = 1 \dots N$ , ισούται με  $V_{rSS}$ , όπου,

$$V_{rSS} = \sqrt{V_{fund}^2 + V_{harm1}^2 + V_{harm2}^2 + \dots + V_{harmN}^2}$$

(β) Παίζει ρόλο στην τιμή  $V_{rSS}$  η σχετική φάση των αρμονικών μεταξύ τους και ως τη θεμελιώδη συνιστώσα;

## Εφαρμογή

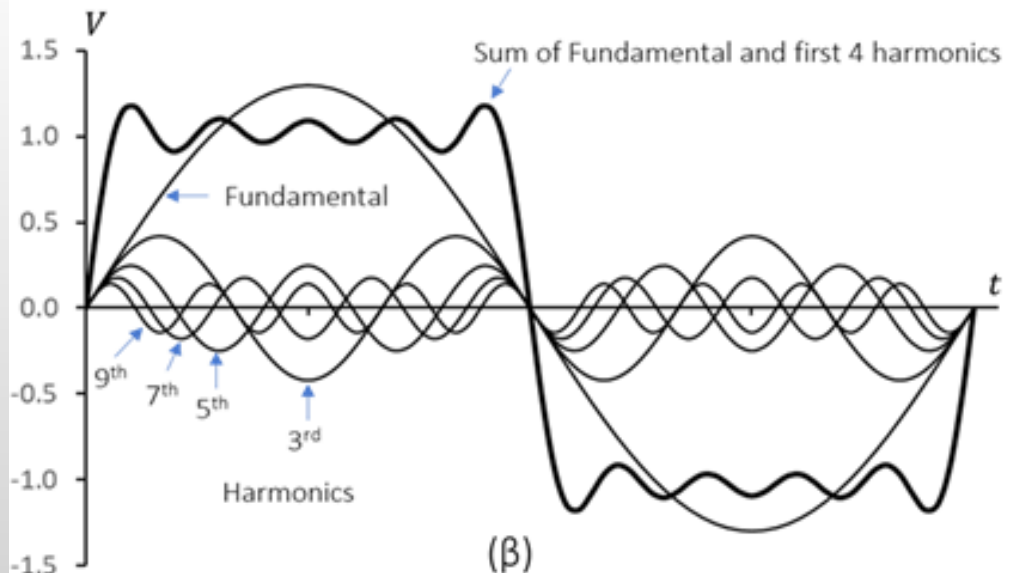
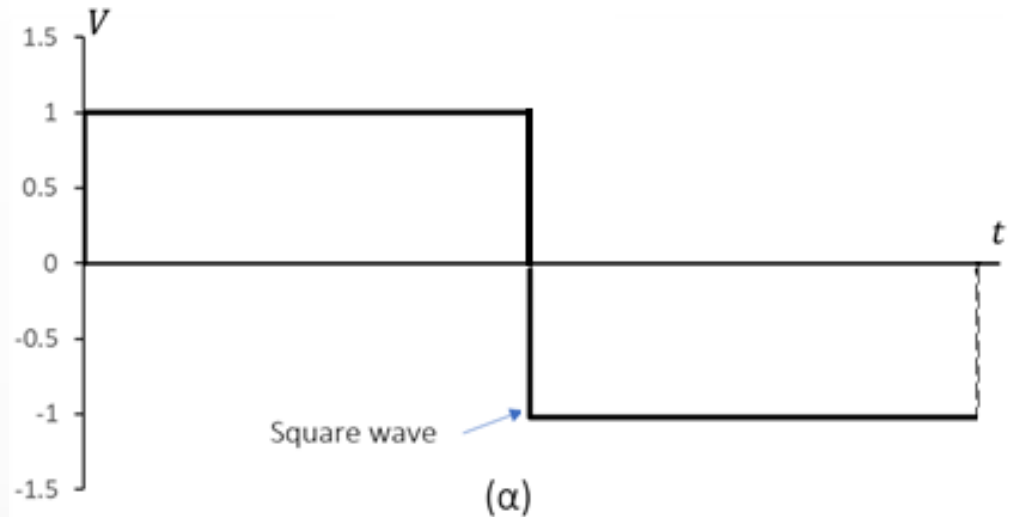
Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 'Multitone Standard Function Generation.exe' την οποία μπορείτε να βρείτε κατεβάζοντας το 'Δημιουργία αρμονικά παραμορφωμένου ημιτόνου' από το φάκελο 'Πολυμέσα' της σελίδας του μαθήματος στο eclass, επιβεβαιώστε τη μορφή και το πλάτος της συνολικής προκύπτουσας κυματομορφής (άθροισμα) για τις περιπτώσεις των αρμονικών της σελίδας 37

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, υπολογίστε την τάση  $V_{rSS}$  της προκύπτουσας κυματομορφής για τις περιπτώσεις των εικόνων (α) και (β) της σελ. 37.

Για την εφαρμογή, θεωρήστε συχνότητα θεμελιώδους = 10Hz, συχνότητα 2<sup>ης</sup> αρμονικής = 20Hz, συχνότητα 3<sup>ης</sup> αρμονικής = 30Hz. Πλάτος θεμελιώδους και αρμονικών = 1V.

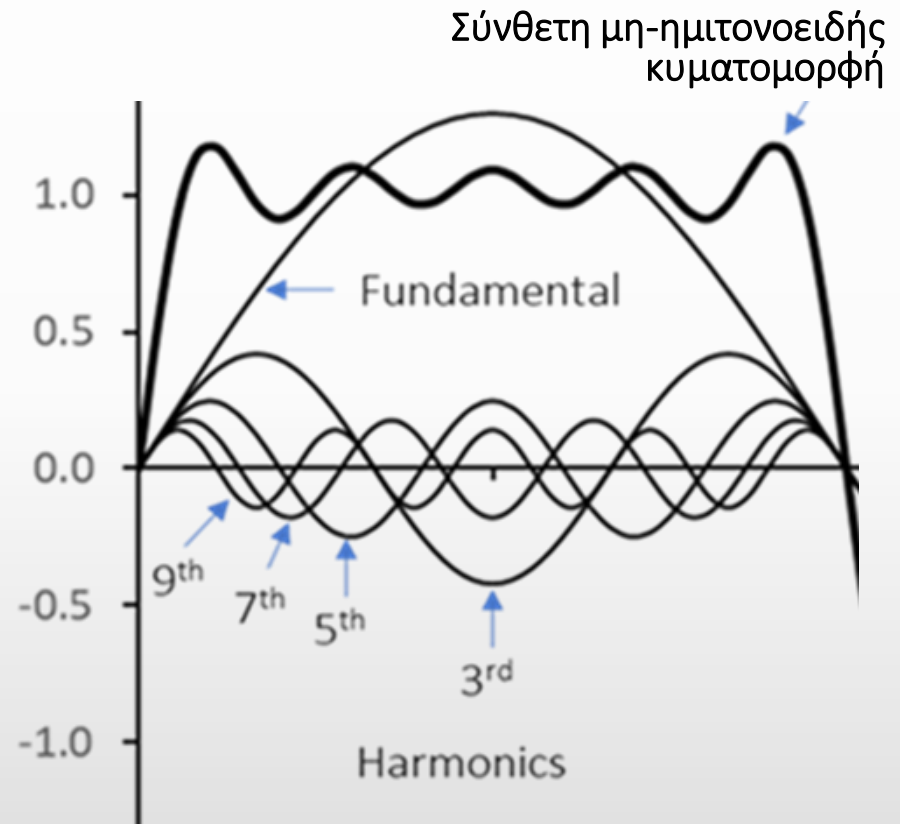
# Σύνθετες περιοδικές τάσεις – Το παράδειγμα του τετραγωνικού κύματος

- Εικ. (α) - Τετραγωνική κυματομορφή τάσης πλάτους 1V
- Εικ. (β) – ‘Sum of Fundamental and first 4 harmonics’ είναι το κύμα που προκύπτει από την άθροιση των στιγμιαίων τιμών θεμελιώδους και των τεσσάρων πρώτων αρμονικών (3<sup>ης</sup>, 5<sup>ης</sup>, 7<sup>ης</sup> και 9<sup>ης</sup>).



# Σύνθετες μη-ημιτονοειδείς κυματομορφές τάσης που μπορούν να αναλυθούν σε σειρά Fourier

- Αποτελούνται από μια θεμελιώδη συχνότητα και ένα **άπειρο πλήθος** των αρμονικών.
- Τα πλάτη θεμελιώδους και αρμονικών εκφράζονται σαν σειρά Fourier με άπειρους όρους
- Είναι όλες οι περιοδικές, γενικά, μη-ημιτονοειδείς κυματομορφές.
- Τα πλάτη και οι φάσεις των αρμονικών είναι συγκεκριμένες σε κάθε περιοδική κυματομορφή.



## Ανάλυση σύνθετης μη-ημιτονοειδούς κυματομορφής στις αρμονικές της - Σειρά Fourier

Κάθε **περιοδική** κυματομορφή τάσης  $v(t)$  κυκλικής συχνότητας  $\omega_0$  μπορεί να εκφραστεί σαν άπειρο άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t), n = 1, 2, 3, \dots$$

- $V_{dc}$ ,  $a_n$  και  $b_n$  οι **συντελεστές Fourier (Fourier coefficients)** της περιοδικής συνάρτησης
- Η συχνότητα  $\omega_0$  της περιοδικής τάσης αντιπροσωπεύει τη **βασική συχνότητα (fundamental frequency)** τη θεμελιώδη (ή βασική) συχνότητα της κυματομορφής.
- Τα ακέραια πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας  $\omega_0$ , είναι γνωστά σαν **αρμονικές συχνότητες (harmonic frequencies)** της περιοδικής κυματομορφής.

## Σειρά Fourier – Μιγαδική μορφή

Σε πολλές περιπτώσεις είναι βολικό να χρησιμοποιείται η μορφή Euler ( $e^{ix} = \cos x + j \sin x$ ) για τη σειρά Fourier

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n e^{jn\omega_0 t} = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n e^{2\pi j \left(\frac{n}{T}\right) t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου,  $T = 2\pi/\omega_0$  η περίοδος της περιοδικής κυματομορφής της τάσης.

Σε αυτή τη μορφή, οι συντελεστές  $V_n$

$$V_n = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-2\pi j \left(\frac{n}{T}\right) t} dt$$

έχουν μιγαδική μορφή  $V_n = |V_n| e^{\theta_n}$

όπου,

$|V_n|$  δίνει το πλάτος του κύματος με συχνότητα  $n\omega_0$  ( $= 2\pi n/T$ ) που υπάρχει στην τάση και

$\theta_n$  δίνει τη φάση (ή την αρχική γωνία) του κύματος.

## Ανάλυση ψηφιοποιημένης κυματομορφής από σειρά $N$ δειγμάτων της - Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transformation - DFT) δίνει τα πλάτη  $V_n$  των συνιστωσών ημιτονοειδών κυμάτων από τα  $N$  δείγματα  $v_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ) του μετρηθέντος αναλογικού σήματος

Ένας αλγόριθμος που υπολογίζει το διακριτό μετασχηματισμό Fourier είναι ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transformation - FFT)

$$V_n = \sum_{i=0}^{N-1} v_i e^{-j\left(\frac{2\pi n}{N}\right)i}$$

όπου, ο δείκτης  $n$  παίρνει τις τιμές  $0, 1, 2, \dots, N-1$

δηλαδή, με FFT, αν έχουμε  $N$  δείγματα μέτρησης ενός αναλογικού σήματος, μπορούμε να βρούμε  $N$  ημιτονοειδείς συνιστώσες του.

## Εφαρμογή

Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 'Multi-tone Measurement.exe' την οποία μπορείτε να βρείτε κατεβάζοντας το 'Ανάλυση Fourier των βασικών περιοδικών κυματοσυναρτήσεων' από το φάκελο 'Πολυμέσα' της σελίδας του μαθήματος στο eclass, επιβεβαιώστε τα πλάτη των τεσσάρων πρώτων αρμονικών του τετραγωνικού κύματος, όπως φαίνονται στις εικόνες των σελ. 41 και 42.

Ρυθμίσεις: στο μενού *Waveform type* επιλέξτε *Square*. Με τα κουμπιά *frequency* και *amplitude* δώστε τις τιμές 1 (Hz) και 1 (V), αντίστοιχα.

Στην 'οθόνη του παλμογράφου' *Waveform* δείτε την παραγόμενη κυματομορφή στο πεδίο του χρόνου και στην 'οθόνη του αναλυτή φάσματος' *Spectrum* δείτε τα πλάτη θεμελιώδους και αρμονικών συνιστωσών στο πεδίο συχνοτήτων.

Στον πίνακα *Multiple tone information* δείτε τη συχνότητα, το πλάτος και τη σχετική φάση των αρμονικών.

Επιλέξτε το πλήθος αρμονικών που θέλετε να δείτε ρυθμίζοντας κατάλληλα το κουμπί *Max num of tones*.

## Αριθμός Euler σύνθετης RSS τάσης

Η RMS τιμή μιας σύνθετης μη-ημιτονειδούς κυματομορφής μπορεί, εν γένει, να εκφραστεί σαν RSS άθροισμα (άθροισμα τετραγώνων)

$$V_{rss} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{fund}^2 \times (\text{Euler number})}$$

όπου,

$V_{dc}$  = η dc τιμή της σύνθετης τάσης,

$V_{fund}$  = η rms τιμή της θεμελιώδους συνιστώσας της σύνθετης τάσης

**Euler number** = ο αριθμός Euler που ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλατών των συντελεστών Fourier της σύνθετης συνάρτησης.



# Πίνακας σύγκρισης σύνθετων τάσεων

	$V_{rss}$	Fourier Series	Euler Number	$V_{fund}$
Square	$V_{pk}$	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$	$\frac{\pi^2}{8}$	$\frac{V_{rss}\sqrt{8}}{\pi}$
Sine	$\frac{V_{pk}}{\sqrt{2}}$	–	–	$\frac{V_{pk}}{\sqrt{2}}$
Triangle	$\frac{V_{pk}}{\sqrt{3}}$	$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$	$\frac{\pi^4}{96}$	$\frac{4V_{rss}\sqrt{6}}{\pi^2}$
Sawtooth	$\frac{V_{pk}}{\sqrt{3}}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{V_{rss}\sqrt{6}}{\pi}$

# Ολική Αρμονική Παραμόρφωση

Η Ολική Αρμονική Παραμόρφωση (Total Harmonic Distortion - THD) ή παράγων παραμόρφωσης (Distortion factor) ορίζεται ως ο λόγος του αθροίσματος ισχύος όλων των αρμονικών συνιστωσών προς την ισχύ της θεμελιώδους συχνότητας.

$$\text{THD}_V = \frac{\sqrt{V_{harm1}^2 + V_{harm2}^2 + V_{harm3}^2 + \dots}}{V_{fund}}$$

Είναι ένα μέτρο της αρμονικής παραμόρφωσης ενός σήματος που εκφράζει το ποσοστό της ισχύος του σήματος που μεταφέρεται στις αρμονικές του σε σχέση με την ισχύ της θεμελιώδους συχνότητας.

Για το ρεύμα ( $\text{THD}_I$ )

$$\text{THD}_I = \frac{\sqrt{I_{harm1}^2 + I_{harm2}^2 + I_{harm3}^2 + \dots}}{I_{fund}}$$

## Εφαρμογή

Βλ. εφαρμογή προσομοίωσης Harmonic Analyzer Measurement - THD.exe στο φάκελο 'Ολική Αρμονική Παραμόρφωση (THD) στο φάκελο 'Πολυμέσα' στη σελίδα του μαθήματος στο eclass.

- Στις τηλεπικοινωνίες, χαμηλότερο THD σημαίνει εκπομπή καθαρότερου σήματος χωρίς πρόκληση Η/Μ παρεμβολών σε άλλες ηλεκτρονικές συσκευές.
- Στα συστήματα ισχύος, μικρότερο THD σημαίνει μείωση των ακραίων διακυμάνσεων ρεύματος (peak currents), της θέρμανσης, των εκπομπών παρασιτικών (αρμονικών) συχνοτήτων και των απωλειών στον πυρήνα (core loss) στους κινητήρες.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Τυπικές προδιαγραφές ενός καλού εργαστηρίου μετρήσεων και ελέγχου σήμερα απαιτεί την ύπαρξη ρυθμιστών τάσης (voltage regulators), εκτός αυτών που είναι ενσωματωμένοι στα όργανα, που να διατηρούν την τάση

1.  $\pm 2\%$  εντός της μέσης ή ονομαστικής τάσης του δικτύου
2. χρόνο απόκρισης  $\leq 0.3$  s και
3. ολική αρμονική παραμόρφωση  $\text{THD}_V \leq 5\%$