

- ΑΓΩΓΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΜΕΤΑΛΛΑ
- ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ ΜΗ-ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΥΛΙΚΑ
- ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΑΓΩΓΟΥ ΣΕ ΥΨΗΛΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ (HF) - ΑC ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ

ΑΓΩΓΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΜΕΤΑΛΛΑ

- Νόμος Fourier για τη μεταφορά θερμότητας
- Νόμος Wiedemann-Franz-Lorenz
- Θερμική Αντίσταση

Νόμος Fourier για τη μεταφορά θερμότητας

- Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας: $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$

- Πειραματικές μετρήσεις δείχνουν ότι

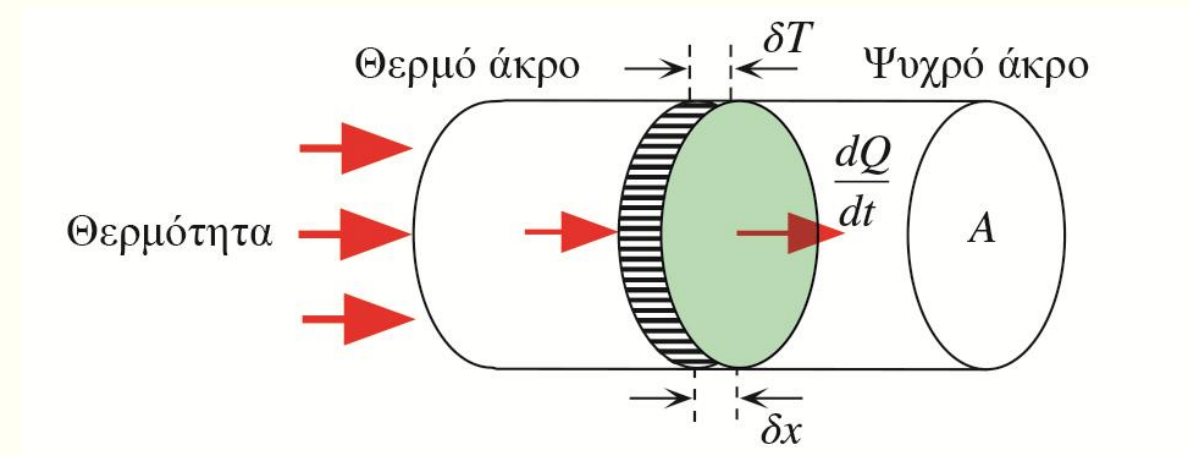
$$\dot{Q} = -\kappa A \frac{dT}{dx}$$

$\frac{dT}{dx}$ βαθμίδα ή βάθμωση (gradient) της
θερμοκρασίας

A επιφάνεια διατομής

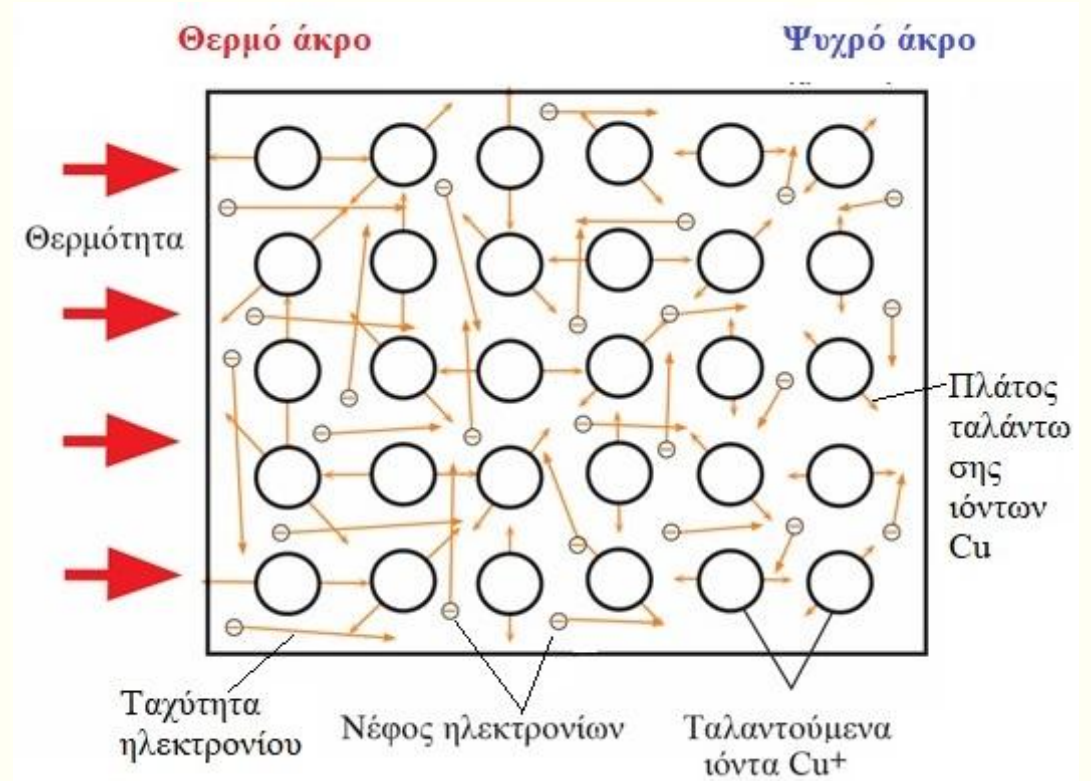
κ **θερμική αγωγιμότητα** (thermal
conductivity) του υλικού

- Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση της ροής θερμότητας: θερμότερο $\rightarrow$ ψυχρότερο



Θερμική αγωγιμότητα

- Μηχανισμοί μεταφοράς θερμότητας
 - α) Στα μέταλλα: κυρίως μέσω των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας (εικ.)
 - β) Μη-μεταλλικά υλικά: μέσω ταλαντώσεων πλέγματος



Σχηματική αναπαράσταση μηχανισμού θερμικής αγωγής στα μέταλλα

Τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια της θερμής περιοχής (απορρόφηση θερμότητας από πηγή θερμότητας) φτάνουν στη ψυχρή περιοχή, συγκρούονται με ιόντα και μεταφέρουν την ενέργειά τους στο πλέγμα.

Νόμος Fourier – Νόμος Ohm: μια ενδιαφέρουσα σύγκριση

Νόμος Fourier για τη μεταφορά θερμότητας:

$$\dot{Q} = -\kappa A \frac{dT}{dx}$$

- Ο παράγοντας που προκαλεί ροή θερμότητας ($\dot{Q}$) είναι η βάρθρωση του θερμοκρασίας ($\frac{dT}{dx}$)
- με συντελεστή τη θερμική αγωγιμότητα κ

Νόμος του Ohm για το ηλεκτρικό ρεύμα: $J = \sigma E$

$$\left. \begin{aligned} E &= -\frac{dV}{dx} \\ J &= \frac{I}{A} = \frac{\dot{q}}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{q} = -\sigma A \frac{dV}{dx}$$

- Ο παράγοντας που προκαλεί ηλεκτρικό ρεύμα ($\dot{q}$) είναι η βάρθρωση του ηλεκτρικού δυναμικού ($\frac{dV}{dx}$)
- με συντελεστή την ηλεκτρική αγωγιμότητα σ

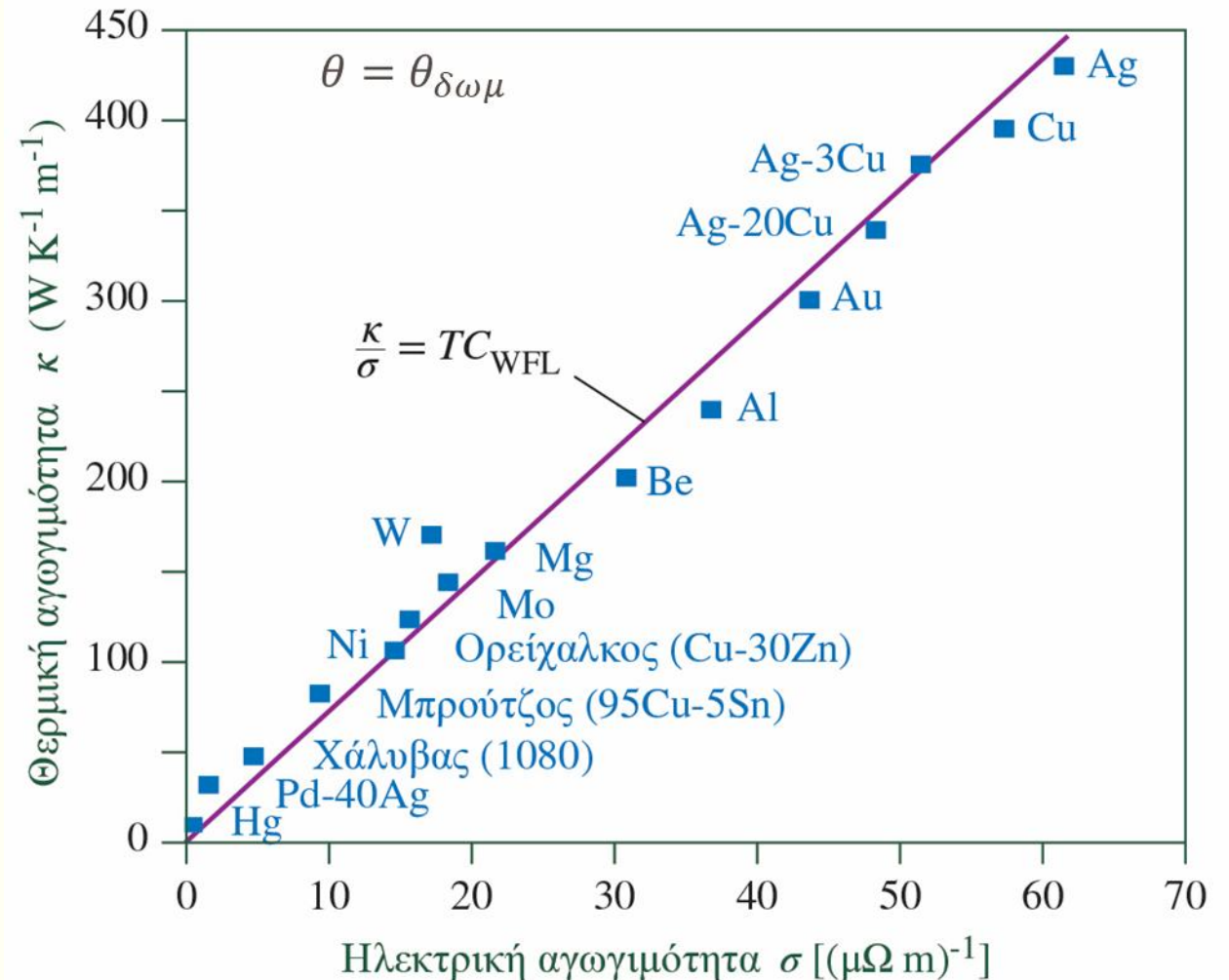
Νόμος Wiedemann-Franz-Lorenz: Η συσχέτιση συντελεστών θερμικής και ηλεκτρικής αγωγιμότητας στα μέταλλα

$$\frac{\kappa}{\sigma} = C_{WFL} \cdot T$$

C_{WFL} = αριθμός Lorenz (σταθερά)

$$C_{WFL} = \frac{\pi^2 k^2}{3e^2} = 2.44 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}$$

- Ο νόμος WFL δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε θερμοκρασίες δωματίου και υψηλότερες (εικ.)



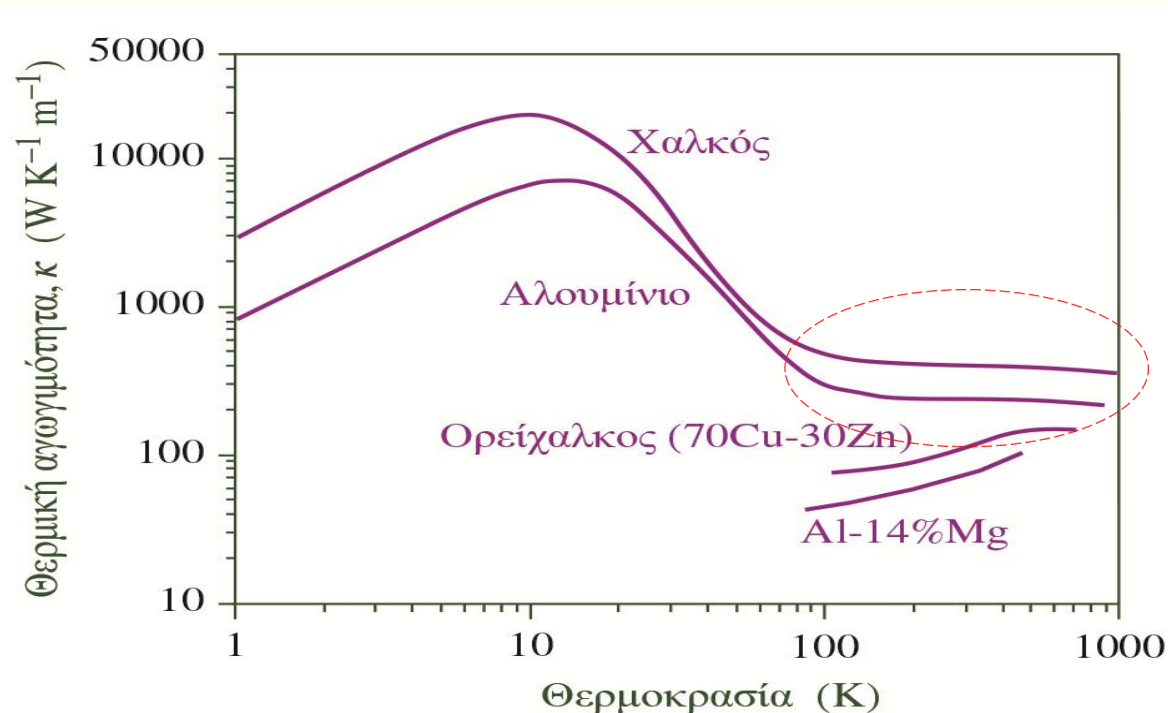
Συμπεράσματα από νόμο WFL: Ανεξαρτησία θερμικής αγωγιμότητας από τη θερμοκρασία

Νόμος WFL: $\frac{\kappa}{\sigma} = C_{WFL} \cdot T \Rightarrow \kappa = C_{WFL} \cdot T \cdot \sigma$

- Εφόσον, για καθαρά μέταλλα $\sigma = \frac{C}{T}$

$$\Rightarrow \kappa = C_{WFL} \cdot T \cdot \frac{C}{T} \Rightarrow \kappa = C_{WFL} \cdot C$$

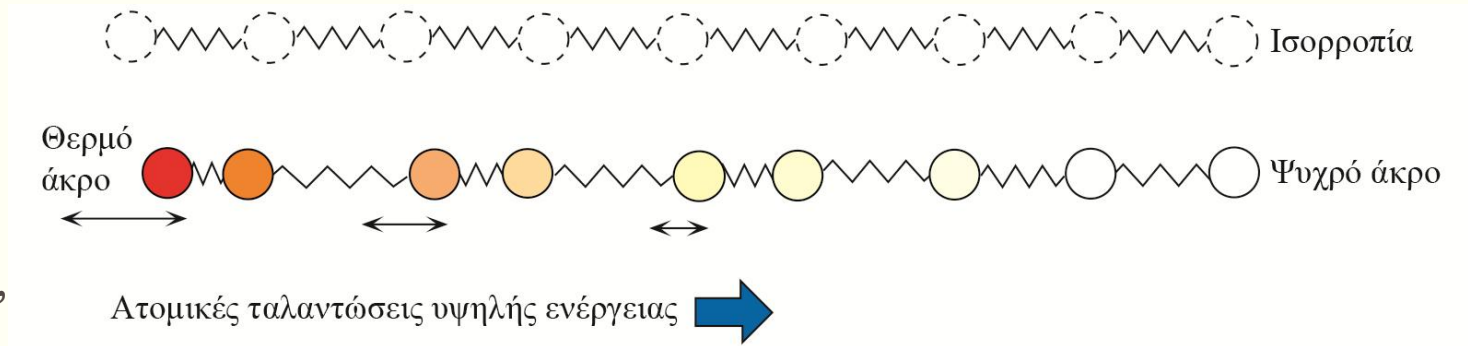
αναμένουμε κ σχετικά ανεξάρτητη της θερμοκρασίας



Ποιοτικά, $\kappa = \text{constant}$ για $T > 100 \text{ K}$

Θερμική αγωγιμότητα στα μη-μεταλλικά υλικά

- Δεν υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια
- Η μεταφορά θερμότητας γίνεται μέσω των ταλαντώσεων του πλέγματος.
- Θερμαίνοντας το ένα άκρο του κρυστάλλου (Εικ.), το πλάτος ταλάντωσης των ατόμων εκεί αυξάνεται
- Θεωρώντας τους δεσμούς μεταξύ των ατόμων σαν αλυσίδα ελατηρίων, η ταλάντωση μεταβιβάζεται στα γειτονικά άτομα.
- Η διάδοση της θερμότητας γίνεται με τη μορφή **κύματος ταλάντωσης** (vibrational wave) προς το ψυχρότερο άκρο.
- Όσο ισχυρότερη είναι η σύζευξη των ατόμων, τόσο μεγαλύτερη η θερμική αγωγιμότητα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (α) Διαμάντι (ισχυρότατοι ομοιοπολικοί δεσμοί C), $\kappa \approx 1000 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

(β) Πολυμερή υλικά (ασθενέστατοι δευτερεύοντες δεσμοί), $\kappa < 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

Τυπικές τιμές για τη θερμική αγωγιμότητα διαφόρων κατηγοριών υλικών στους 25°C

Material	κ (W m ⁻¹ K ⁻¹)	Material	κ (W m ⁻¹ K ⁻¹)
Pure metal		Ceramics and glasses	
Nb	52	Glass-borosilicate	0.75
Fe	80	Silica-fused (SiO ₂)	1.5
Zn	113	S ₃ N ₄	20
W	178	Alumina (Al ₂ O ₃)	30
Al	250	Sapphire (Al ₂ O ₃)	37
Cu	390	Beryllium (BeO)	260
Ag	420	Diamond	~1000
Metal alloys		Polymers	
Stainless steel	12–16	Polypropylene	0.12
55% Cu–45% Ni	19.5	PVC	0.17
70% Ni–30% Cu	25	Polycarbonate	0.22
1080 steel	50	Nylon 6,6	0.24
Bronze (95% Cu–5% Sn)	80	Teflon	0.25
Brass (63% Cu–37% Zn)	125	Polyethylene, low density	0.3
Dural (95% Al–4% Cu–1% Mg)	147	Polyethylene, high density	0.5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.20

Θερμική αγωγιμότητα μείγματος

Υπολογίστε τη θερμική αγωγιμότητα στους 100°C μπρούτζου 95/5 (95% Cu-5% Sn) με πορώδες 15% κ.ο. αν γνωρίζετε ότι η ηλεκτρική του αγωγιμότητα είναι $10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

ΛΥΣΗ

Από τον κανόνα της ανάμειξης για τον υπολογισμό της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης σε ετερογενές μίγμα

$$\sigma_{eff} = \sigma_c \frac{(1 - \chi)}{\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right)}$$

και το νόμος WFL

$$\frac{\kappa}{\sigma} = C_{WFL} \cdot T$$

Μπορούμε να έχουμε έναν αντίστοιχο κανόνα ανάμειξης για τον υπολογισμό της θερμικής αγωγιμότητας ετερογενών μειγμάτων

$$\kappa_{eff} = \kappa_c \frac{(1 - \chi)}{\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right)}$$

$$\kappa_{eff} = \kappa_c \frac{(1 - \chi)}{\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right)}$$

Από νόμο WFL, έχουμε

$$\kappa_c = \kappa_{95/5} = \sigma_{95/5} C_{WFL} \cdot T = (10^7)(2.44 \times 10^{-8})(300) = 73.2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Αντικαθιστώντας στον κανόνα ανάμειξης, παίρνουμε

$$\kappa_{eff} = \kappa_c \frac{(1 - \chi)}{\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right)} = (73.2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}) \left[\frac{1 - 0.15}{1 + \frac{1}{2}(0.15)} \right] = 57.9 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Θερμική αντίσταση

Σε αντιστοιχία με το ηλεκτρικό ρεύμα $I = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$

και την ηλεκτρική αντίσταση R που ορίζεται από το νόμο του Ohm

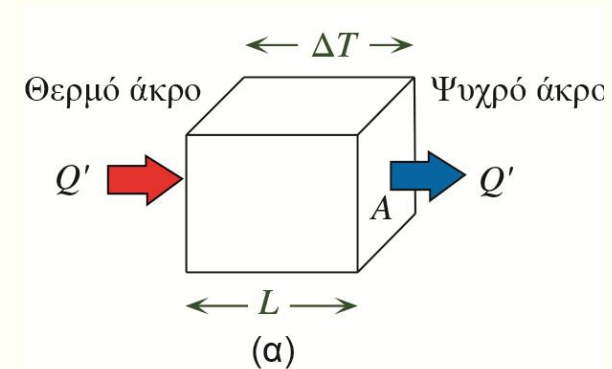
$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

ορίζουμε το **θερμικό ρεύμα** (heat current) $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$

και τη **θερμική αντίσταση** (thermal resistance), $\theta = \frac{\Delta T}{\dot{Q}}$

Από το νόμο WFL [εικ. (α)] $\dot{Q} = A\kappa \frac{\Delta T}{L} \Rightarrow \frac{L}{\kappa A} = \frac{\Delta T}{\dot{Q}}$

Η θερμική αντίσταση είναι: $\theta = \frac{L}{\kappa A} \quad \left(R = \frac{L}{\sigma A} \right)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.21

Θερμική αγωγιμότητα μείγματος

Υπολογίστε τη διαφορά θερμοκρασίας $\Delta T = T_1 - T_2$ μεταξύ των δύο άκρων ενός ορειχάλκινου κυλίνδρου ειδικής αντίστασης $50 \text{ n}\Omega \text{ m}$ ο οποίος απάγει θερμότητα με ρυθμό 10 W .

ΛΥΣΗ

Αν $\theta = \frac{\Delta T}{\dot{Q}}$ η θερμική αντίσταση του ορειχάλκινου κυλίνδρου, η θερμοκρασιακή διαφορά των άκρων του δίνεται από τη σχέση $\Delta T = \theta \dot{Q}$

Η θερμική αντίσταση είναι

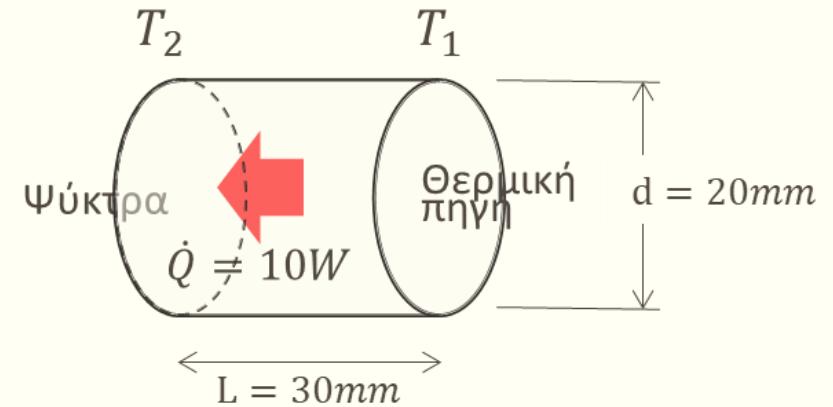
$$\theta = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{L}{\kappa A} = \frac{L}{\kappa(\pi \frac{d^2}{4})} = \frac{4L}{\pi \kappa d^2}$$

όπου κ η θερμική αγωγιμότητα του ορειχάλκου για την οποία ξέρουμε

$$\kappa = \sigma T C_{WFL} = \frac{1}{\rho} T C_{WFL}$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά παίρνουμε

$$\Delta T = \frac{4\rho L}{\pi T C_{WFL} d^2} \dot{Q} = \frac{4(50 \times 10^{-9} \Omega \text{ m})(30 \times 10^{-3} \text{ m})}{\pi(300 \text{ K})(2.44 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2})(20 \times 10^{-3} \text{ m})^2} (10 \text{ W}) = 6.5 \text{ K } (^\circ\text{C})$$



ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ ΜΗ-ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

- Φορείς φορτίου στους ημιαγωγούς
- Μηχανισμοί ηλεκτρικής αγωγιμότητας σε ιοντικούς κρυστάλλους (μονωτές)
- Ηλεκτρική αγωγιμότητα υάλων

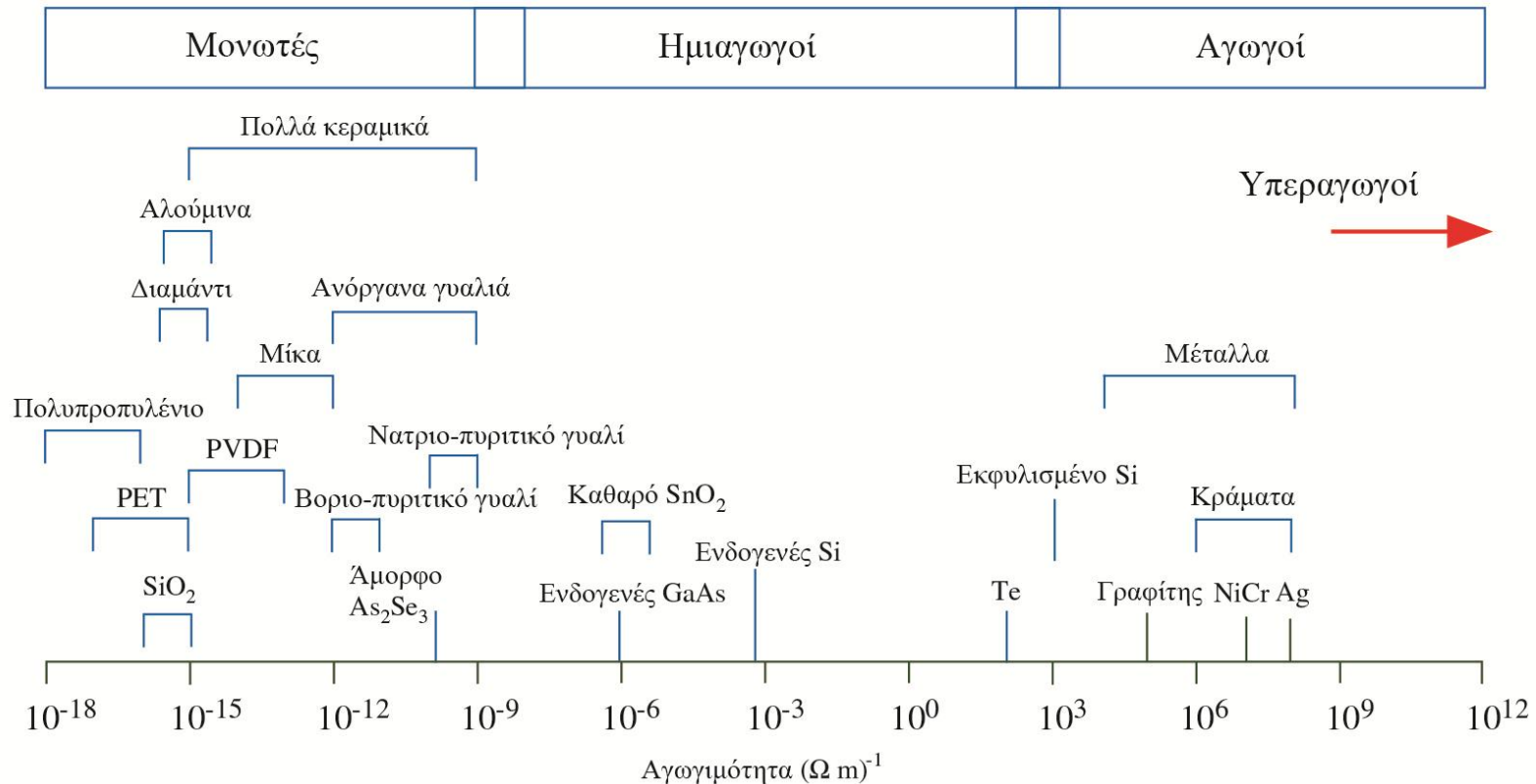
Ηλεκτρική αγωγιμότητα μη μεταλλικών υλικών

- Βασιζόμενοι στη τιμή της αγωγιμότητας, κατατάσσουμε τα υλικά σε τρεις κατηγορίες:

1. **Αγωγούς** (Conductors),

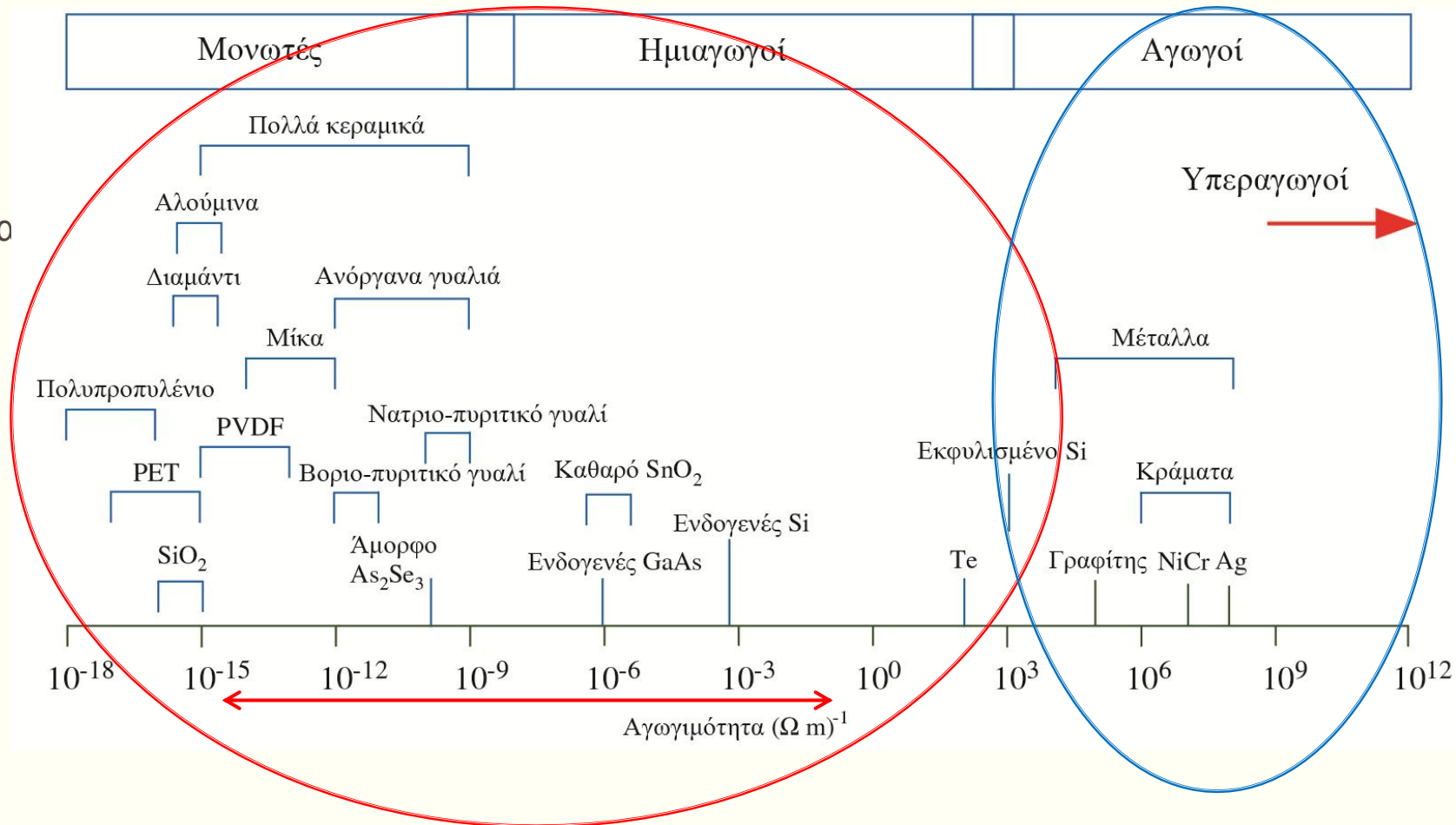
2. **Ημιαγωγούς**
(Semiconductors)

3. **Μονωτές** (Insulators)



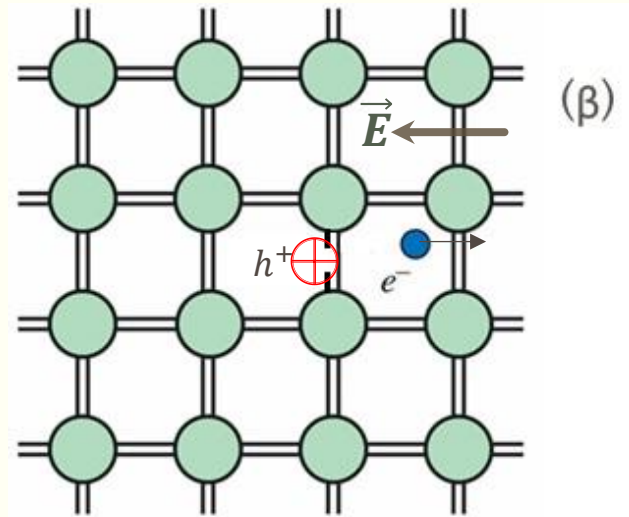
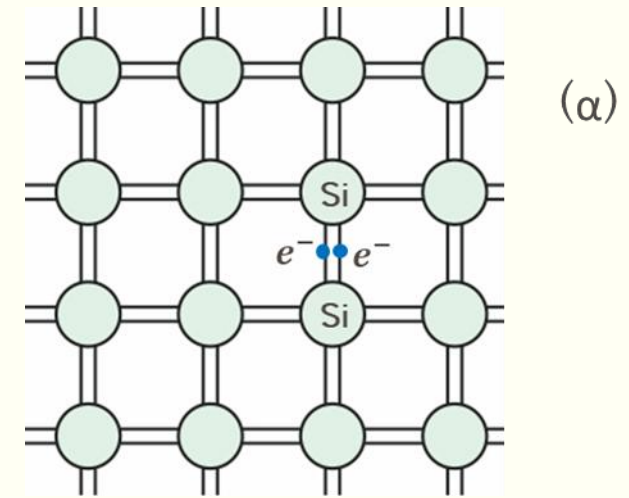
Ηλεκτρική αγωγιμότητα μη μεταλλικών υλικών (συνέχεια)

- Από τον πίνακα αγωγιμοτήτων των υλικών, παρατηρούμε:
- Ενώ οι **αγωγοί** ταυτίζονται σχεδόν ολοκληρωτικά με το **μέταλλα**
- Δεν υπάρχει σαφές όριο μεταξύ **μονωτών** και **ημιαγωγών**
- Τα μη-μεταλλικά στοιχεία δεν είναι τέλει μονωτές (έχουν μικρή αλλά μη-μηδενική αγωγιμότητα)



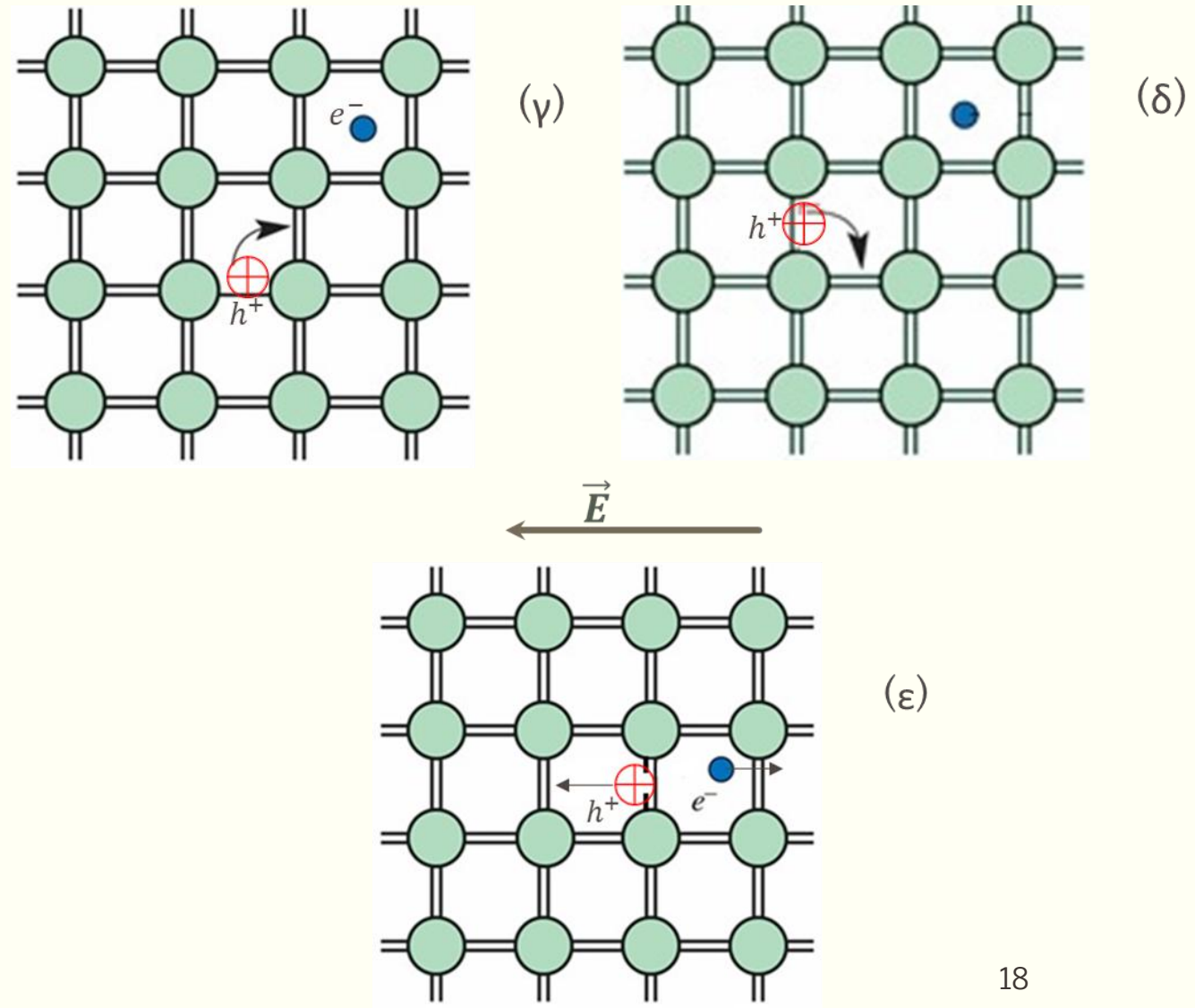
Ημιαγωγοί

- Σε τέλειο κρύσταλλο πυριτίου, κάθε άτομο Si συνδέεται με τα (τέσσερα) γειτονικά του με ομοιοπολικό δεσμό, δηλαδή, ζεύγος ηλεκτρονίων [εικ. (α)].
- Από την κινητική θεωρία γνωρίζουμε ότι τα άτομα ταλαντώνονται με πλάτος ανάλογο της θερμοκρασίας.
- Σε αυξημένες θερμοκρασίες, ορισμένα άτομα έχουν στατιστικά (κατανομή Boltzmann) ενέργεια (πλάτος) ταλάντωσης ικανή να σπάσει το δεσμό.
- Ένας σπασμένος δεσμός σημαίνει την απελευθέρωση ενός ηλεκτρονίου e^- [εικ. (β)].
- Το e^- , υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$, μπορεί να ολισθαίνει, είναι δηλαδή **ηλεκτρόνιο αγωγιμότητας** (conduction electron)
- Απομακρυνόμενο το e^- αφήνει πίσω του μια περιοχή με ολικό θετικό φορτίο $\oplus$. Η περιοχή του σπασμένου δεσμού λέγεται **οπή** (hole, h^+)



Ημιαγωγοί (συνέχεια)

- Ένα ηλεκτρόνιο από γειτονικό δεσμό μπορεί να κάνει ένα άλμα και να καλύψει αυτό τον δεσμό, αφήνοντας μια οπή στη δική του θέση [εικ. (γ)]
- Με διαδοχικά άλματα, οι οπές μπορούν να περιφέρονται μέσα στον κρύσταλλο [εικ. (δ)]
- Πρακτικά, οι οπές θεωρούνται ως ελεύθερα θετικά φορτισμένα σωματίδια.
- Στην παρουσία ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$, οι οπές ολισθαίνουν προς την κατεύθυνση του πεδίου και συνεισφέρουν στην αγωγιμότητα όπως τα ηλεκτρόνια από τα οποία προήλθαν.

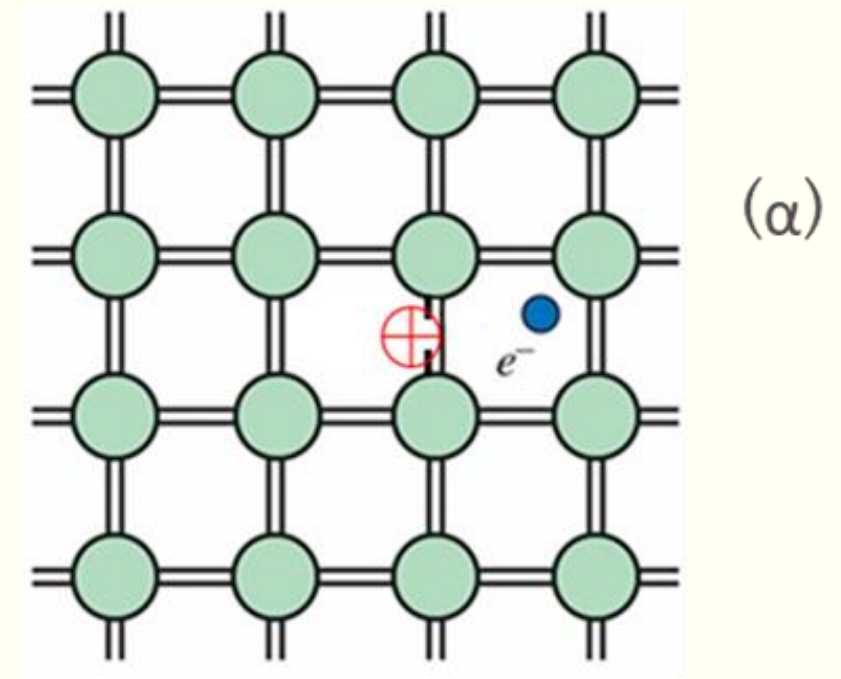


Μηχανισμοί δημιουργίας ηλεκτρονίων - οπών

1. Θερμικός (εγγενής) μηχανισμός [εικ. (α)]:

Σπάσιμο δεσμού λόγω αυξημένης ενέργειας ταλάντωσης και δημιουργία ζεύγους ηλεκτρονίου-οπής

- Εξαρτάται από τη θερμοκρασία
- Συμβαίνει σε κάθε ημιαγωγό
- Δημιουργεί ίσες συγκεντρώσεις οπών και ηλεκτρονίων (σε κάθε σπασμένο δεσμό αντιστοιχεί από 1 e^- και 1 h^+)

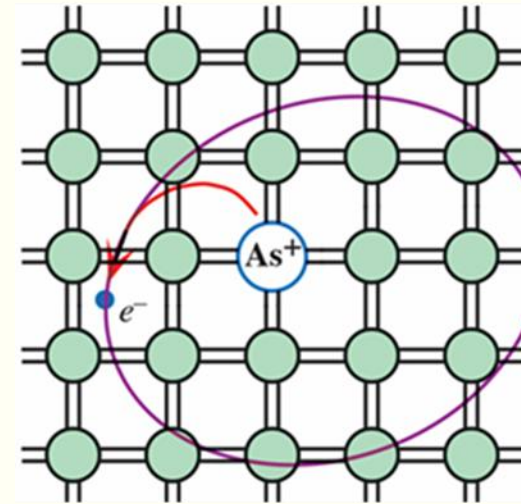


Μηχανισμοί δημιουργίας ηλεκτρονίων – οπών (συνέχεια)

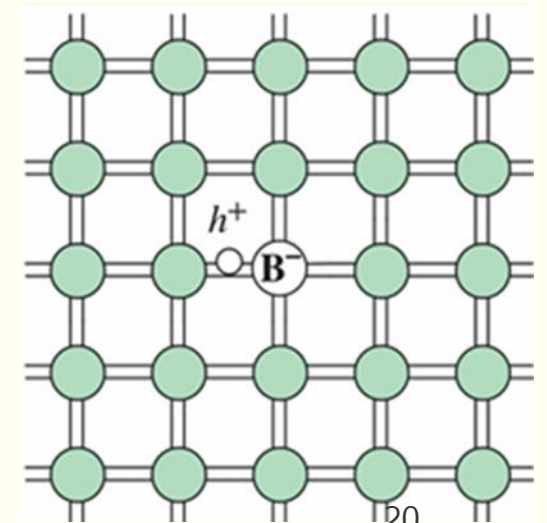
2. Μηχανισμός **νόθευσης** (doping): εκ προθέσεως αντικατάσταση ορισμένων ατόμων Si

- από άτομα 5-σθενούς ατόμου, π.χ., As [εικ. (β1)] και δημιουργία 1 e^- /(doped atom) – **νόθευση τύπου n**
- από άτομα 3-σθενούς ατόμου, π.χ., B [εικ. (β2)] και δημιουργία 1 h^+ /(doped atom) – **νόθευση τύπου p**

(β1) n-doping



(β2) p-doping

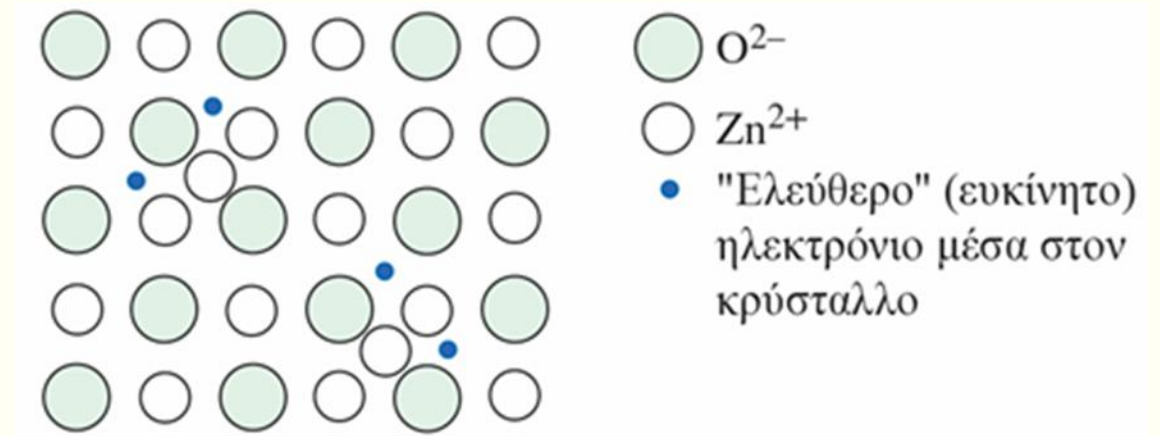


Μηχανισμοί δημιουργίας ηλεκτρονίων – οπών (συνέχεια)

3. Ύπαρξη ατελειών λόγω μη-στοιχειομετρίας [εικ. (γ)]

Π.χ., μη-στοιχειομετρικός κρύσταλλος ZnO

- Υπάρχει πλεόνασμα ατόμων Zn (έλλειψη ατόμων O)
- Δημιουργία $2 e^- / (\text{Zn atom})$



(γ)

Ολική αγωγιμότητα κρυστάλλου ημιαγωγού

$$\sigma = e p \mu_h + e n \mu_e$$

όπου, n η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας

μ_e η κινητικότητα ολίσθησης των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας

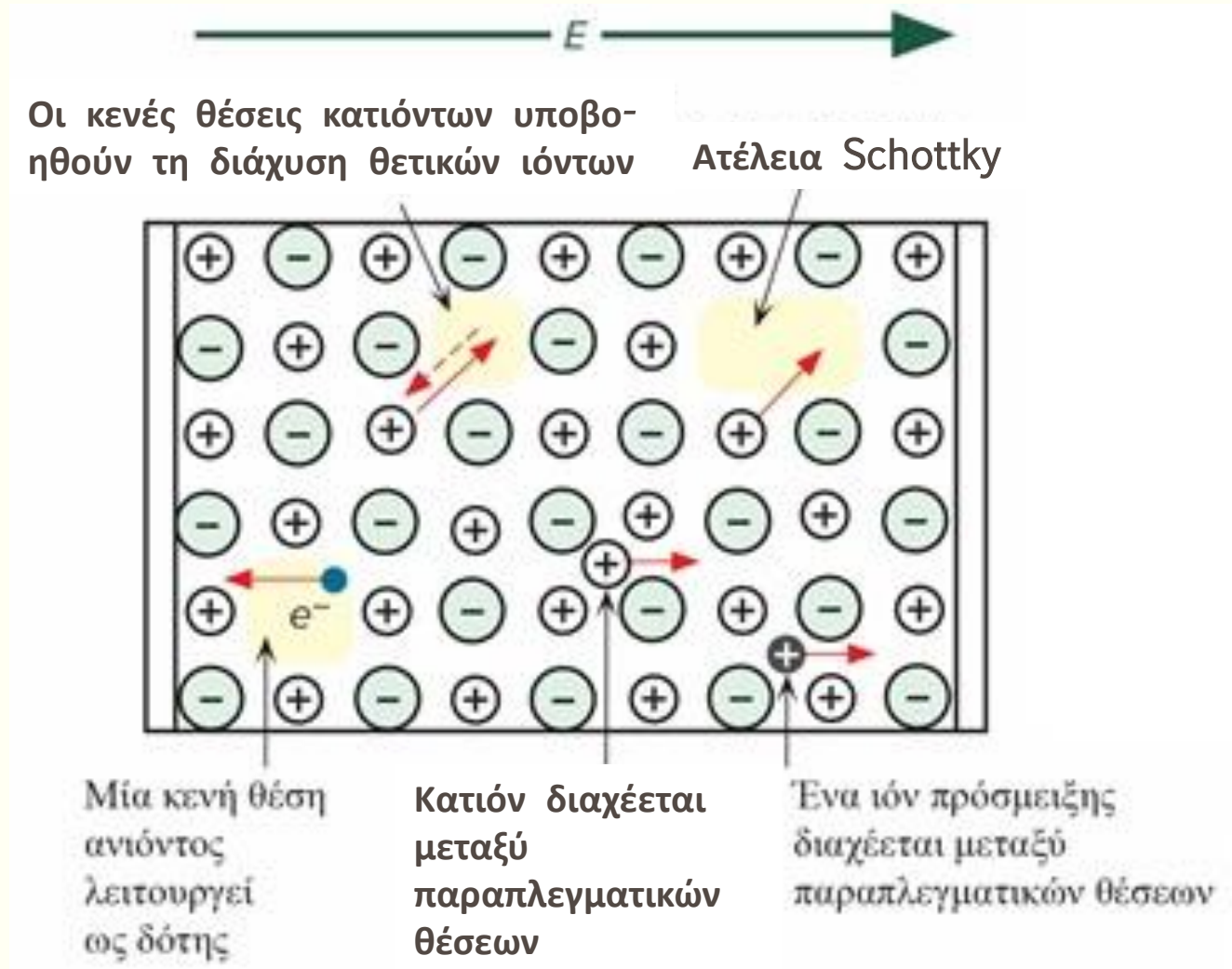
p η συγκέντρωση των οπών

μ_h η κινητικότητα ολίσθησης των οπών στον κρύσταλλο του ημιαγωγού

- Οι συγκεντρώσεις n και p είναι πολύ μικρότερες από ότι στα μέταλλα $\Rightarrow$ αγωγιμότητα ημιαγωγών $\ll$ αγωγιμότητας μετάλλων
- Παρότι οι κινητικότητες ολίσθησης μ_e και μ_h των περισσότερων ημιαγωγών είναι μεγαλύτερες της κινητικότητας των ηλεκτρονίων των μετάλλων.

Ηλεκτρική αγωγιμότητα σε ιοντικούς κρυστάλλους – Οι μηχανισμοί

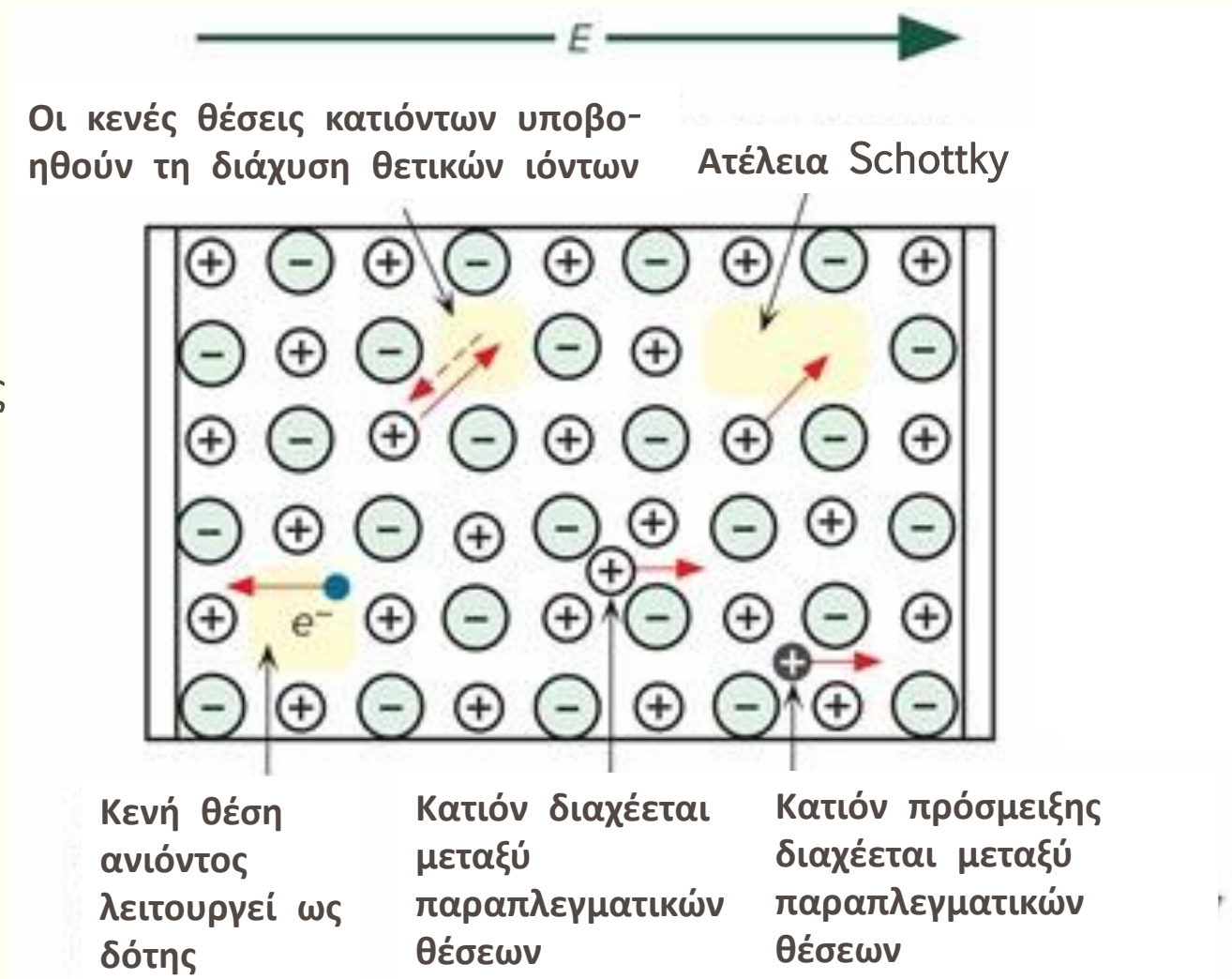
1. Θετικό ιόν $\oplus$ από κανονική πλεγματική θέση μεταπηδά (διαχέεται) σε γειτονικό πλεγματικό κενό ή κενό ατέλειας Schottky (κενό ζεύγους ανιόντος-κατιόντος)
2. Κατιόν $\oplus$ σε παραπλεγματική θέση διαχέεται σε διπλανή παραπλεγματική θέση
 - Η διάχυση γίνεται πάντα στη κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου E



Ηλεκτρική αγωγιμότητα σε ιοντικούς κρυστάλλους – Οι μηχανισμοί (συνέχεια)

3. Ιόν (κατιόν) πρόσμειξης $\oplus$ (συνήθως μικρότερο των εγγενών κατιόντων) διαχέεται μεταξύ παραπλεγματικών θέσεων
4. Ελεύθερο ηλεκτρόνιο e^- , η ύπαρξη του οποίου οφείλεται στην απουσία ανιόντος ολισθαίνει (drift) αντίθετα στο E

Υπενθύμιση: Ένας ιοντικός κρύσταλλος πρέπει να παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερος. Επομένως, η ύπαρξη κατιόντων προσμείξεων σε παραπλεγματικές θέσεις πρέπει να συνοδεύεται από ίσο αριθμό e^- , επιπλέον ανιόντων ή κενών θέσεων κατιόντων.



Ηλεκτρική αγωγιμότητα σε υάλους (γυαλιά)

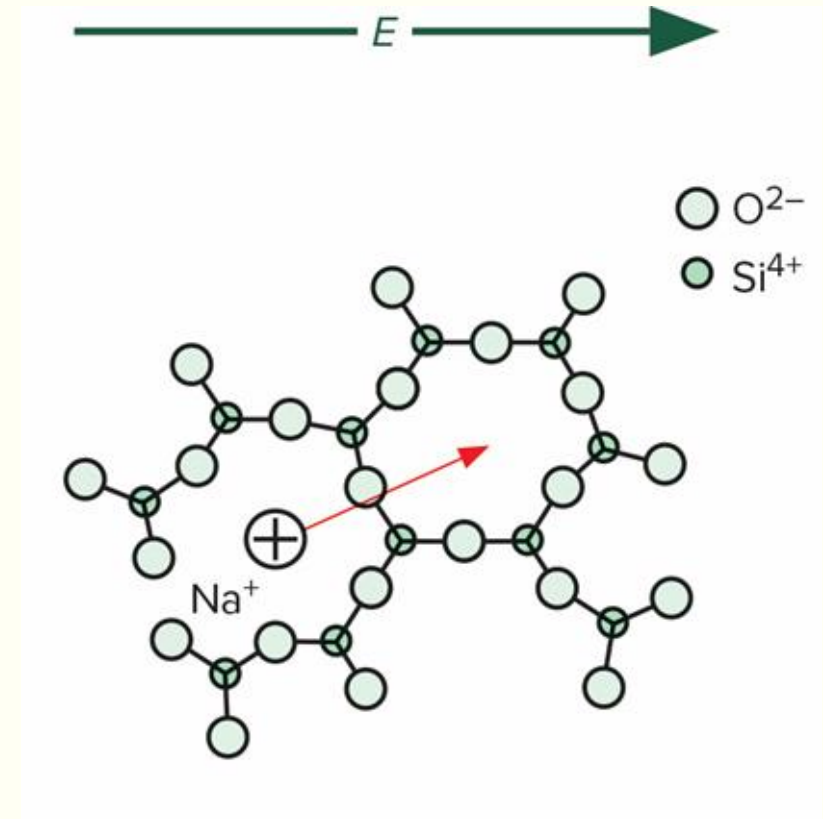
1. Πολλά γυαλιά περιέχουν ορισμένα ευκίνητα ιόντα στη δομή τους

Παράδειγμα:

Θετικό ιόν $\oplus \text{Na}^+$ σε πυριτικό γυαλί μπορεί να μεταπηδά από μια παραπλεγματική θέση προς γειτονική πάντα προς την κατεύθυνση του πεδίου E

Το συμβατικό γυαλί (στα τζάμια) έχει μεγάλη συγκέντρωση Na^+ .

Για $\theta > 300 - 400^\circ\text{C}$ γίνεται αρκετά αγωγίμο.



Παραδείγματα τυπικών μηχανισμών αγωγής σε επιλεγμένα υλικά όπου εμπλέκονται ανιόντα και κατιόντα

Material	$T(^{\circ}\text{C})$	$\sigma(\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1})$ (Approximate)	Main Conducting Ion
NaCl crystal	550	2×10^{-6}	Cation, Na^{+}
KCl crystal	550	3×10^{-7}	Cation, K^{+}
AgCl crystal	250	3×10^{-4}	Cation, Ag^{+}
RbAg ₄ I ₅ crystal	25	2×10^{-1}	Cation, Ag^{+}
BaF ₂ crystal	500	1×10^{-5}	Anion, F^{-}
Silicate glass ^a with 26.5%Na ₂ O	250	2×10^{-5}	Cation, Na^{+}
Borosilicate glass ^b with 20.4%Na ₂ O	250	1×10^{-6}	Cation, Na^{+}
Borosilicate glass ^c with 19.1%K ₂ O	250	5×10^{-8}	Cation, K^{+}

^aSiO₂(73.5%)-Na₂O(26.5%) ^bB₂O₃(26.1%)-SiO₂(53.5%)-Na₂O(20.4%) ^cB₂O₃(25.8%)-SiO₂(55.1%)-K₂O(19.1%)

Συνολική αγωγιμότητα μη-μεταλλικών υλικών (συνέχεια)

- Δεδομένου ότι ο μηχανισμός αγωγιμότητας στα μη-μεταλλικά υλικά έχει το χαρακτήρα μεταπήδησης (διάχυσης) από μια πλεγματική (ή παραπλεγματική) θέση σε γειτονική, αναμένουμε να χαρακτηρίζεται από μια θερμοκρασιακή εξάρτηση εκθετικού τύπου (Arrhenius)

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{kT}}$$

όπου, E_σ η **ενέργεια ενεργοποίησης για την ειδική αγωγιμότητα** (σχετίζεται με τον ελάχιστο φραγμό δυναμικού που απαιτείται για να υπερπηδήσει ένα άτομο σε γειτονική πλεγματική θέση

σ_0 παράγων που σχετίζεται με τις σκεδάσεις λόγω ταλάντωσης των ατόμων και, επομένως, είναι αντιστρόφως ανάλογος της θερμοκρασίας

$$\sigma_0 = \frac{A}{T}$$

Συνολική αγωγιμότητα μη-μεταλλικών υλικών (συνέχεια)

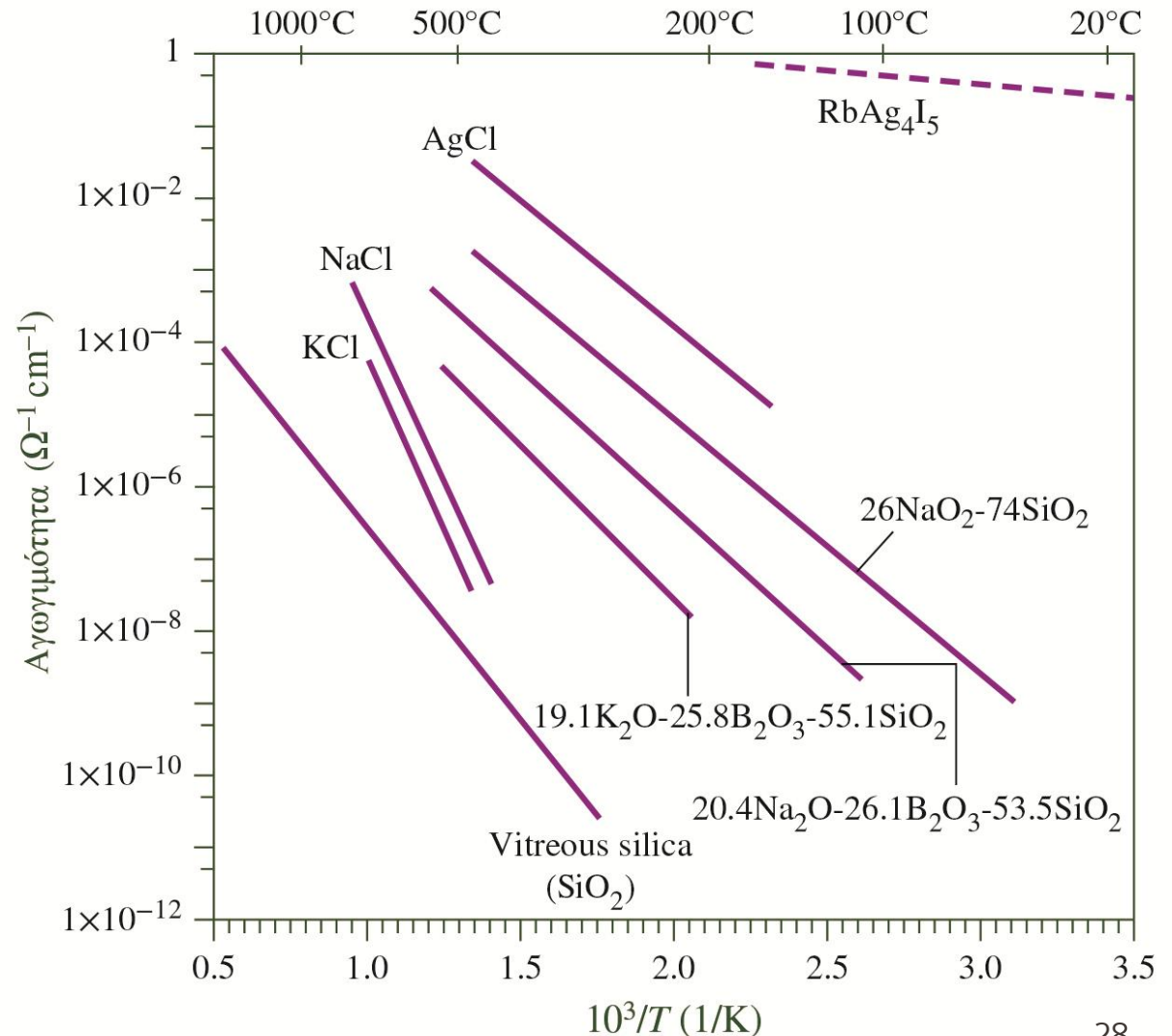
Λογαριθμίζοντας τη σχέση

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{kT}}$$

παιρνουμε τη γραμμική σχέση $\ln \sigma$
ως προς το αντίστροφο της
θερμοκρασίας, $\frac{1}{T}$

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \left(\frac{E_\sigma}{k} \right) \frac{1}{T}$$

από την κλίση της οποίας
υπολογίζουμε την ενέργεια
ενεργοποίησης E_σ (βλ. εικ.)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.24 Αγωγιμότητα καθαρού (ιοντικού) κρυστάλλου KCl

Μετρήσεις ηλεκτρικής αγωγιμότητας σε καθαρό κρύσταλλο KCl δίνουν τιμές $1.65 \times 10^{-7} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ και $1.85 \times 10^{-5} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ σε θερμοκρασίες 518 °C και 674 °C, αντίστοιχα.

(α) Που οφείλεται η αγωγιμότητα στον κρύσταλλο;

(β) Πόση είναι η ενέργεια ενεργοποίησης, E_σ ;

ΛΥΣΗ

(α) Στη διάχυση των κατιόντων K^+ (βλ. σχετ. πίνακα παραπάνω)

$$(\beta) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_\sigma}{kT}} \\ \sigma_0 = \frac{A}{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma = \frac{A}{T} e^{-\frac{E_\sigma}{kT}}$$

$$\text{για } T_1 = 791 \text{ K } (518 + 273) \text{ έχουμε } \sigma_1 = \frac{A}{T_1} e^{-\frac{E_\sigma}{kT_1}}$$

$$\text{και } T_2 = 947 \text{ K } (674 + 273) \text{ έχουμε } \sigma_2 = \frac{A}{T_2} e^{-\frac{E_\sigma}{kT_2}}$$

$$\text{Διαιρώντας κατά μέλη, έχουμε } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{T_2}{T_1} e^{-\frac{E_\sigma}{k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} \longrightarrow$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{T_2}{T_1} e^{-\frac{E_\sigma}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} \Rightarrow e^{-\frac{E_\sigma}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{\sigma_2 T_2}{\sigma_1 T_1} \Rightarrow e^{-\frac{E_\sigma}{k}\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_1}\right)} = \frac{\sigma_2 T_2}{\sigma_1 T_1} \Rightarrow e^{\frac{E_\sigma}{k}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_1}\right)} = \frac{\sigma_2 T_2}{\sigma_1 T_1}$$

Παίρνοντας τους λογαρίθμους των δύο μελών έχουμε

$$\frac{E_\sigma}{k} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_1} \right) = \ln \left(\frac{\sigma_2 T_2}{\sigma_1 T_1} \right)$$

$$E_\sigma = \frac{k T_1 T_2}{(T_2 - T_1)} \ln \left(\frac{\sigma_2 T_2}{\sigma_1 T_1} \right)$$

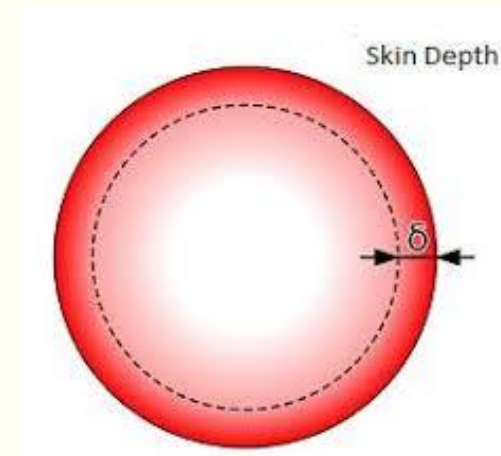
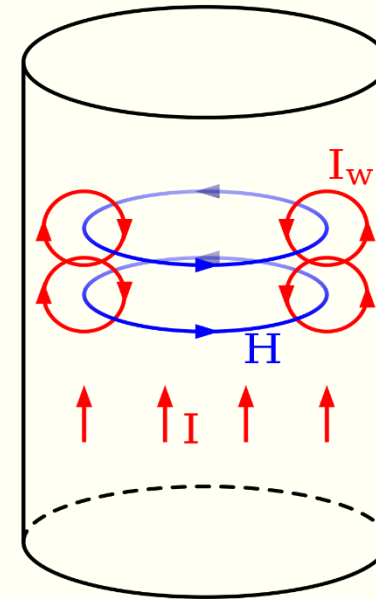
$$E_\sigma = \frac{(1.38 \times 10^{-23})(791)(947)}{(947 - 791)} \ln \left[\frac{(1.85 \times 10^{-5})(947)}{(1.65 \times 10^{-7})(791)} \right] = 2.03 \text{ eV}$$

ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΑΓΩΓΟΥ ΣΕ ΥΨΗΛΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ (HF) - ΑC ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ

- Επιδερμικό φαινόμενο

Αντίσταση αγωγού στο εναλλασσόμενο ρεύμα

- Ένα ρεύμα I που ρέει μέσω ενός αγωγού προκαλεί ένα μαγνητικό πεδίο H .
- Εάν το ρεύμα μεταβάλλεται, η αντίστοιχη μεταβολή του H προκαλεί δινορεύματα I_w
- Η φορά των δινορευμάτων είναι τέτοια που ακυρώνουν εν μέρει τη ροή ρεύματος στο κέντρο του αγωγού και την ενισχύουν κοντά στην επιφάνεια.
- Συνεπώς, το ρεύμα σε υψηλές συχνότητες προτιμά να ρέει σε ένα επιφανειακό (επιδερμικό) στρώμα βάθους δ (**επιδερμικό βάθος** – skin depth)



Επιδερμικό βάθος δ

- Το επιδερμικό βάθος δ

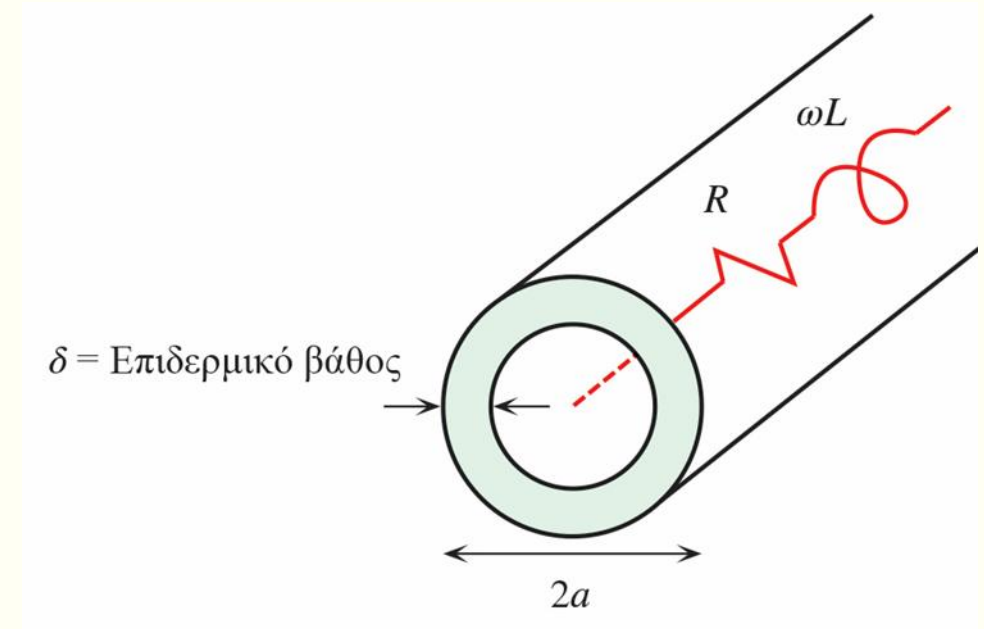
$$\delta = \left(\frac{1}{2} \omega \sigma \mu \right)^{-1/2}$$

- σ η αγωγιμότητα του υλικού του αγωγού
- μ η μαγνητική διαπερατότητα (magnetic permeability) του υλικού του αγωγού

- μ_r η σχετική μαγνητική διαπερατότητα (relative magnetic permeability) του υλικού του αγωγού

$$\mu_r = \mu / \mu_0$$

- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ η μαγνητική διαπερατότητα του κενού



$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \omega \sigma \mu}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu_r \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 10^{-7} f \sigma \mu_r}} \\
 \Rightarrow \delta(\text{σε m}) &\cong \frac{1}{\sqrt{4 f \sigma (\text{σε MS/m}) \mu_r}}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Το επιδερμικό βάθος ρεύματος 10 MHz σε χάλκινο αγωγό ($\sigma = 59 \text{ MS/m}$, $\mu_r = 1$) είναι

$$\delta(\text{σε m}) \cong \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^7 \cdot 59 \cdot 1}} \approx 20 \mu\text{m}$$

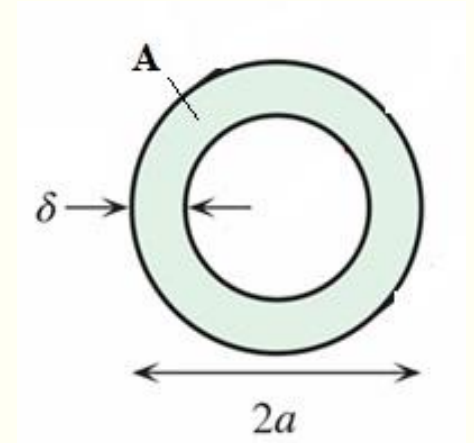
Αντίσταση HF ανά μονάδα μήκους αγωγού λόγω επιδερμικού φαινομένου

- Λόγω επιδερμικού φαινομένου, η ενεργός διατομή A του αγωγού στις υψηλές συχνότητες (HF) περιορίζεται σημαντικά.
- Πρακτικά γίνεται

$$A = \pi \alpha^2 - \pi (\alpha - \delta)^2 \approx 2\pi \alpha \delta$$

- Τότε, η ac αντίσταση του αγωγού ανά μονάδα μήκους $r_{ac} = \frac{R}{l} = \frac{\rho \frac{l}{A}}{l} = \rho/A$ είναι

$$r_{ac} \approx \frac{\rho}{2\pi \alpha \delta} \propto \omega^{1/2}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.27 Επιδερμικό φαινόμενο σε χάλκινο σύρμα σε HF

(α) Πόση είναι η μεταβολή, σε σχέση με τη DC αντίσταση, για χάλκινο σύρμα διαμέτρου 1 mm σε AC σήμα (ρεύμα) 10 MHz;

ΛΥΣΗ

(α) Η αντίσταση ανά μονάδα μήκους του σύρματος στο συνεχές ρεύμα είναι $r_{dc} = \rho_{dc}/\pi\alpha^2$ *

Σε υψηλές συχνότητες είναι $r_{ac} = \rho_{dc}/2\pi\alpha\delta$

Η σχετική τους τιμή είναι $r_{ac}/r_{dc} = \alpha/2\delta$

Στα 10 MHz, $\delta \approx 20 \mu\text{m}$ (βλ., Παράδειγμα, σελ 35)

Επομένως, $r_{ac}/r_{dc} = (10^{-3} \text{ m})/(2 \times 20 \times 10^{-6} \text{ m}) \approx 25$,

δηλαδή, στα 10 MHz η αντίσταση του χαλκού αυξάνεται κατά 25 φορές.

$$* r_{dc} = \frac{R}{l} = \frac{\rho_{dc} \frac{l}{A}}{l} = \frac{\rho_{dc}}{A} = \frac{\rho_{dc}}{\pi\alpha^2}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

(β) Πόση είναι η μεταβολή στο 1GHz;

Για το χαλκό, $\rho_{dc} = 1.70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ και $\sigma_{dc} = 1/\rho_{dc} = 59 \times 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} = 59 \text{ MS/m}$.
Επίσης, $\mu_r \approx 1$

ΛΥΣΗ

Στο 1 GHz, το επιδερμικό βάθος του ρεύματος είναι $\delta \cong \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^9 \cdot 59 \cdot 1}} \approx 2 \mu\text{m}$

που οδηγεί σε λόγο $r_{ac}/r_{dc} = (10^{-3} \text{ m})/(2 \times 2 \times 10^{-6} \text{ m}) \approx 250$

δηλαδή, ή η αντίσταση του χαλκού αυξάνεται κατά 250 φορές.

Στο 1 GHz το ρεύμα στο σύρμα χαλκού περιορίζεται σε ένα επιφανειακό στρώμα πάχους μόλις 2 μm . Το μεγαλύτερο τμήμα της διατομής του σύρματος δεν αξιοποιείται.

Γι' αυτό το λόγο, δεν πρέπει να χρησιμοποιείται χαλκός σε εφαρμογές HF. Η πλέον ενδεδειγμένη λύση είναι χρήση οπτικών ινών.