



---

# ΚΛΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ

## **ΜΕΡΟΣ Β'**

Ηλεκτρική αγωγιμότητα σε μη ιδανικά μέταλλα και στερεά  
διαλύματα: Κανόνες Matthiessen και Nordheim

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΑ ΜΕΤΑΛΛΑ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑ ΔΙΑΛΥΜΑΤΑ: ΚΑΝΟΝΕΣ MATTHIESSEN ΚΑΙ NORDHEIM

Η θεωρία της αγωγιμότητας, που βασίζεται στο μηχανισμό σκέδασης λόγω πλεγματικών ταλαντώσεων και οδηγεί στη γραμμική θερμοκρασιακή εξάρτηση της ειδικής αντίστασης,  $\rho \propto T$ , λειτουργεί ικανοποιητικά μόνο για καθαρά μέταλλα.

Στην περίπτωση μεταλλικών κραμάτων, η  $\rho$  εξαρτάται ασθενώς από τη θερμοκρασία.

Θα πρέπει να αναζητήσουμε διαφορετικό είδος μηχανισμού σκέδασης.

- Κανόνας Matthiessen και Θερμοκρασιακός Συντελεστής Ειδικής Αντίστασης
- Στερεά διαλύματα και κανόνας Nordheim
- Κανόνες ανάμειξης σε ετερογενή μείγματα

# Οι δύο τύποι διαδικασιών σκέδασης του ηλεκτρονίου

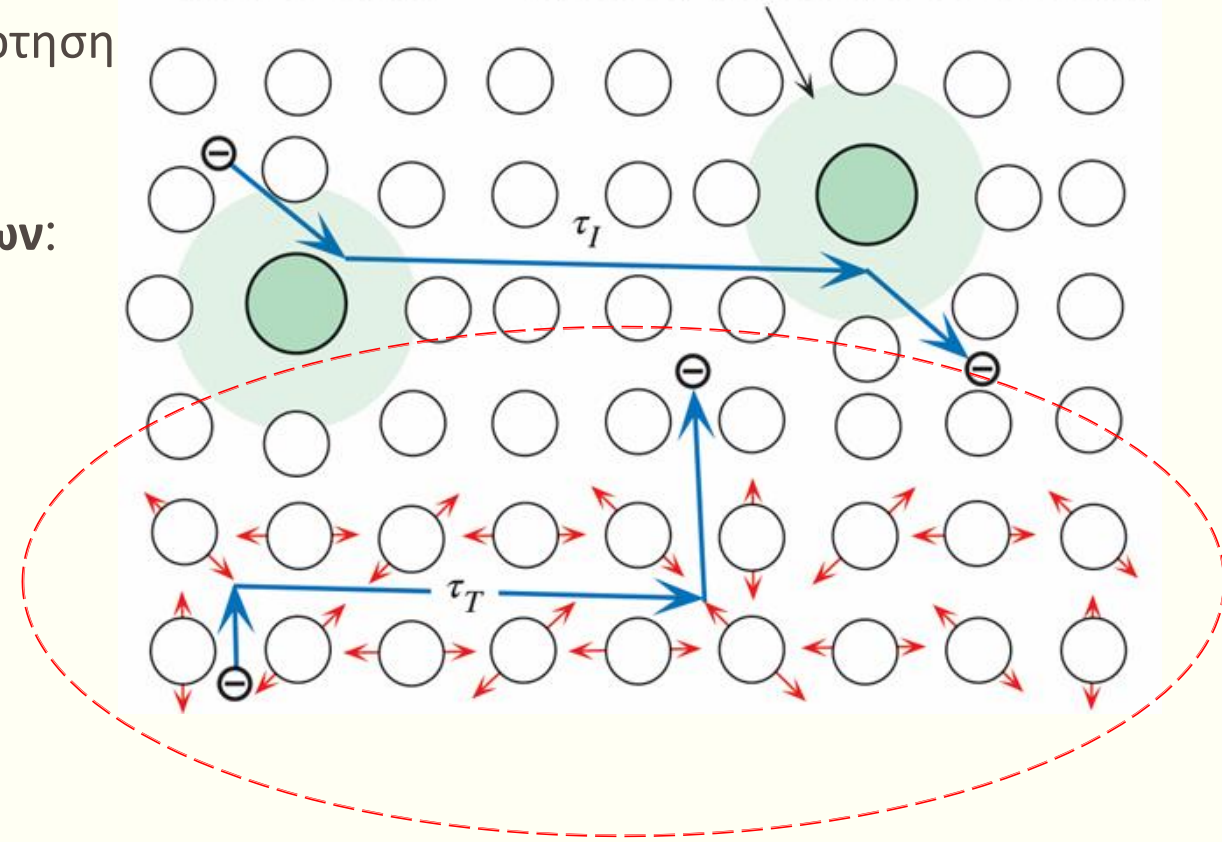
## 1. Σκέδαση λόγω θερμικών ταλαντώσεων:

- κυρίαρχος στα καθαρά, ιδανικά μέταλλα
- οδηγεί σε αναλογική θερμοκρασιακή εξάρτηση της ειδικής αντίστασης,  $\rho_T = A T$

## 2. Σκέδαση λόγω ύπαρξης ατόμων πρόσμιξεων:

- η σκέδαση του  $e$  οφείλεται στην τοπική παραμόρφωση του πλέγματος λόγω του ατόμου πρόσμιξης
- το άτομο πρόσμιξης μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα εγγενή άτομα
- πλεγματική παραμόρφωση  $\Rightarrow$  χωρική μεταβολή της  $\Delta E$

Η περιοχή που έχει παραμορφωθεί λόγω της πρόσμιξης ασκεί δύναμη  $F = -d(PE)/dx$ , η οποία προκαλεί σκέδαση.



- δύναμη ασκούμενη στο  $e$  στην περιοχή παραμόρφωσης:  $F = -\frac{d(PE)}{dx}$

# Υπολογισμός της ολικής συχνότητας σκέδασης

- Οι δύο περιπτώσεις για το μέσο χρόνο μεταξύ διαδοχικών σκεδάσεων:

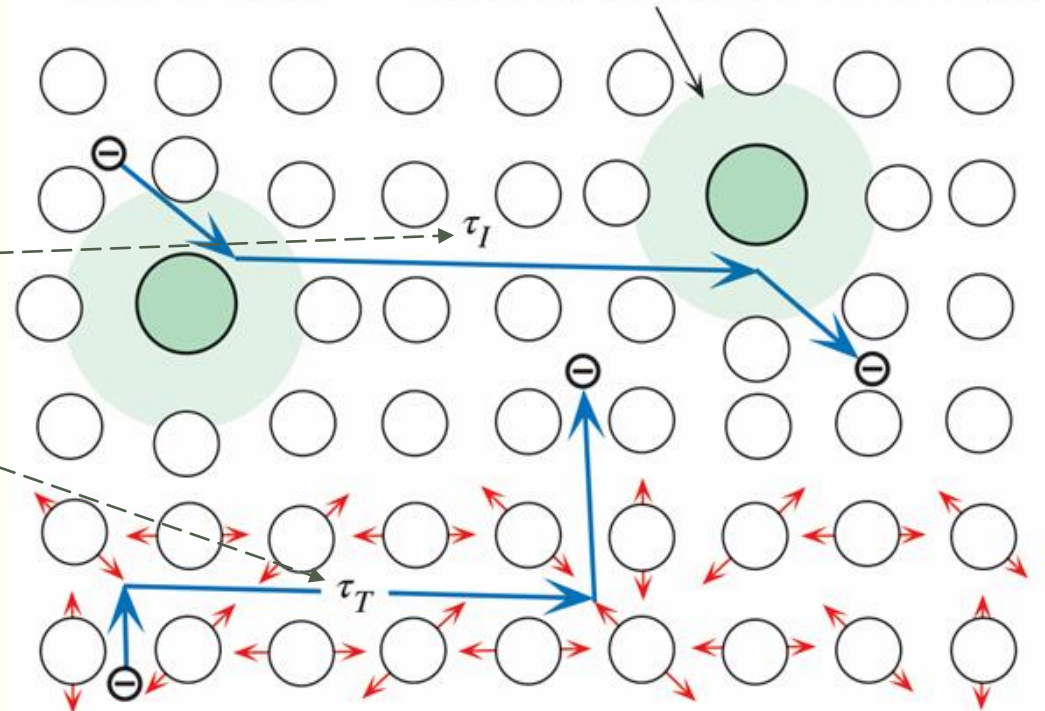
1.  $\tau_T$  για τη σκέδαση λόγω θερμικών ταλαντώσεων πλέγματος

2.  $\tau_I$  για τη σκέδαση λόγω προσμείξεων

- Οι δύο μηχανισμοί σκέδασης είναι ουσιαστικά ανεξάρτητοι

- Συνολική συχνότητα σκέδασης:  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_T} + \frac{1}{\tau_I}$

Η περιοχή που έχει παραμορφωθεί λόγω της πρόσμειξης ασκεί δύναμη  $F = -d(PE)/dx$ , η οποία προκαλεί σκέδαση.



# Ενεργός (ολική) κινητικότητα ολίσθησης

---

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\tau_T} + \frac{1}{\tau_I} \\ \mu_d = \frac{e\tau}{m_e} &\Rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{e}{m_e} \frac{1}{\mu_d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\mu_d} = \frac{1}{\mu_T} + \frac{1}{\mu_I}$$

- $\mu_d$  ενεργός (συνολική) κινητικότητα ολίσθησης
- $\mu_T = \frac{e\tau_T}{m_e}$ , κινητικότητα ολίσθησης περιοριζόμενη από τη σκέδαση λόγω θερμικών ταλαντώσεων πλέγματος (lattice-scattering-limited drift mobility)
- $\mu_I = \frac{e\tau_I}{m_e}$ , κινητικότητα ολίσθησης περιοριζόμενη από τη σκέδαση λόγω προσμίξεων (impurity-scattering-limited drift mobility)

## Ενεργός (ολική) ειδική αντίσταση – Κανόνας Matthiessen

---

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\mu_d} = \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_I} \\ \rho = \frac{1}{en\mu_d} \end{array} \right\} \rightarrow \rho = \rho_T + \rho_I \quad (\text{Matthiessen's rule})$$

$\rho$  ενεργός (ολική) ειδική αντίσταση

$\rho_T = \frac{1}{en\mu_L}$  ειδική αντίσταση οφειλόμενη στις πλεγματικές ταλαντώσεις των εγγενών ατόμων του κρυστάλλου

$\rho_I = \frac{1}{en\mu_I}$  ειδική αντίσταση οφειλόμενη στις προσμείξεις του κρυστάλλου

## Ενεργός ειδική αντίσταση – Κανόνας Matthiessen (συνέχεια)

---

**Matthiessen's rule**  $\rho = \rho_T + \rho_I$

- $\rho_T = \frac{1}{en\mu_T}$  ειδική αντίσταση οφειλόμενη στη σκέδαση των ηλεκτρονίων λόγω πλεγματικών ταλαντώσεις των εγγενών ατόμων
  - $\rho_T \propto T$
  - Πρωταρχικός παράγων ειδικής αντίστασης για τέλειους, καθαρούς κρυστάλλους
- $\rho_I = \frac{1}{en\mu_L}$  ειδική αντίσταση οφειλόμενη στη σκέδαση των ηλεκτρονίων στην περιοχή των ατόμων προσμείξεων
  - εξαρτάται από τη μέση απόσταση ( $\ell_I$ ) μεταξύ των ατόμων προσμείξεων, δηλαδή, από τη συγκέντρωση  $N_I$  των προσμείξεων ( $\ell_I = N_I^{-1/3}$ ),
  - Είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας,
  - $\rho_I = 0$  για καθαρούς κρυστάλλους.

## Ενεργός ειδική αντίσταση – Κανόνας Matthiessen (συνέχεια)

---

Εναλλακτική διατύπωση της ολικής ειδικής αντίστασης

$$\rho = \rho_T + \rho_R$$

όπου,  $\rho_R$  = παραμένουσα ειδική αντίσταση (residual resistivity)

- Οφείλεται στη σκέδαση των ηλεκτρονίων λόγω προσμείξεων, εξαρθρώσεων, παραπλεγματικών ατόμων, πλεγματικών κενών, ορίων κόκκων, κ.λπ.
- Περιλαμβάνει τη  $\rho_I$
- Εξαρτάται ελάχιστα από τη θερμοκρασία

Μια άλλη διατύπωση της ολικής ειδικής αντίστασης με έμφαση στη θερμοκρασιακή εξάρτηση:

$$\rho \approx A T + B$$

οι σταθερές  $A$  και  $B$  εξαρτώνται από το υλικό



# Θερμοκρασιακός συντελεστής ειδικής αντίστασης

---

- Για την έκφραση της ειδικής αντίστασης χρησιμοποιούμε τον θερμοκρασιακό συντελεστή ειδικής αντίστασης  $\alpha_0$  (temperature coefficient of resistivity, TCR)

$$\alpha_0 = \frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\delta\rho}{\delta T} \right]_{T=T_0}$$

$\rho_0$  η ειδική αντίσταση σε θερμοκρασία  $T_0$ , συνήθως 273 K (0 °C) ή 293 K (20 °C)

$\delta\rho = \rho - \rho_0$  η μεταβολή της τιμής της ειδικής αντίστασης που προκύπτει από μεταβολή της θερμοκρασίας  $\delta T = T - T_0$

- Σε ένα εύρος θερμοκρασιών (συνήθως περιορισμένο) που η  $\rho$  έχει γραμμική συμπεριφορά ( $\rho \approx AT + B$ ), το  $\alpha_0$  μπορεί να θεωρηθεί σταθερό, οπότε

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha_0 (T - T_0)]$$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Η γραμμική σχέση  $\rho = A T$

– αποτελεί αρκετά καλή προσέγγιση για αρκετά ευρέως χρησιμοποιούμενα μέταλλα (Cu, Al, Au, κ.λπ.)

– στη περίπτωση αυτή

$$\rho \approx A T + B = A T$$

$$\text{οπότε } \alpha_0 = \frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\delta \rho}{\delta T} \right]_{T=T_0} = \frac{A}{A T_0}$$

$$\text{προκύπτει } \alpha_0 = T_0^{-1} = 1/273$$

Η υπόθεση αυτή είναι παντελώς ανεπαρκής για άλλα μέταλλα, ειδικότερα για τα μαγνητικά μέταλλα Fe και Ni.

Metal	$\rho_0(\text{n}\Omega \text{ m})$	$\alpha_0(1/\text{K})$	$n$	Range and Comment
Aluminum, Al	24.2	$\frac{1}{227}$	1.20	200–800 K
Antimony	390	$\frac{1}{215}$	1.27	80–400 K
Copper, Cu	15.4	$\frac{1}{233}$	1.16	200–1100 K
Gold, Au	20.5	$\frac{1}{242}$	1.13	225–1000 K
Indium, In	80	$\frac{1}{208}$	1.31	200–400 K
Molybdenum, Mo	48.5	$\frac{1}{226}$	1.21	200–2400 K
Platinum, Pt	98.1	$\frac{1}{256}$	1.01	200–1273 K
Silver, Ag	14.7	$\frac{1}{242}$	1.13	200–1100 K
Strontium, Sr	123	$\frac{1}{276}$	0.99	273–800 K
Tin, Sn	115	$\frac{1}{248}$	1.10	200–490 K
Tungsten, W	48.2	$\frac{1}{210}$	1.24	200–3000 K
Iron, Fe	85.7	$\frac{1}{159}$	1.73	200–900 K; magnetic
Nickel, Ni	61.6	$\frac{1}{155}$	1.76	200–700 K; magnetic

# Εξάρτηση της ειδικής αντίστασης από τη θερμοκρασία

- Η γραμμική συμπεριφορά της ειδικής αντίστασης τηρείται ικανοποιητικά από πολλά καθαρά μέταλλα σε όλο το θερμοκρασιακό εύρος, ως τη θερμοκρασία τήξης τους

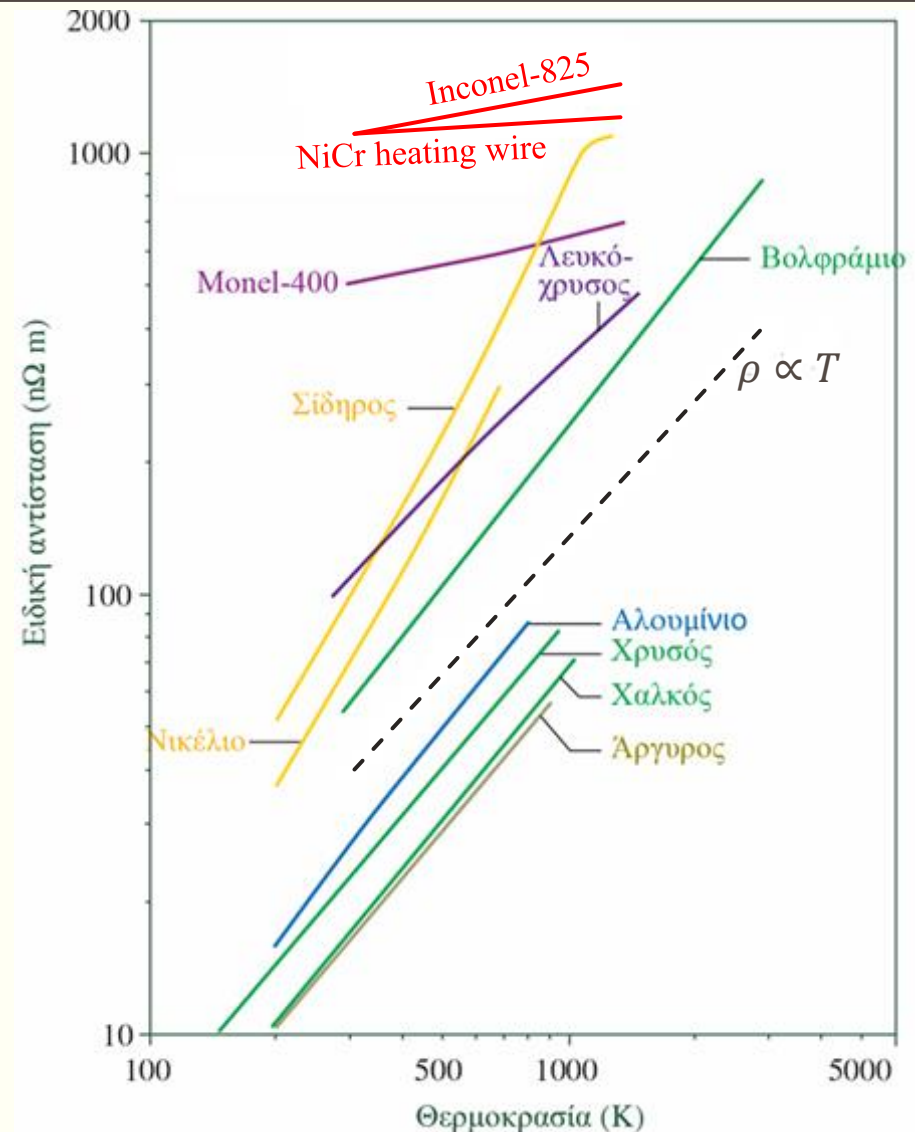
- συγκρίνετε με ευθεία  $\rho \propto T$

- Μπορεί να περιγραφεί από τον εμπειρικό τύπο

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[ \frac{T}{T_0} \right]^n \Rightarrow \rho = \rho_0 \left[ \frac{T}{T_0} \right]^n$$

$n$  δείκτης που προκύπτει από βέλτιστη προσαρμογή της ευθείας στα πειραματικά δεδομένα

- Για κράματα (π.χ., Ni-Cr), η  $\rho$  εξαρτάται κυρίως από την παραμένουσα ειδική αντίσταση (ελάχιστη μεταβολή με  $T$ , δείτε μικρή κλίση γραμμής)



# Στερεά διαλύματα – Επίδραση της κραμάτωσης στην ειδική αντίσταση

- Στα ισόμορφα κράματα δύο μετάλλων, η ειδική αντίσταση αυξάνεται σε σχέση με τα δύο καθαρά μέταλλα και γίνεται λιγότερο εξαρτώμενη από τη θερμοκρασία.
- Στον κανόνα Matthiessen

$$\rho = \rho_T + \rho_I$$

ο όρος  $\rho_I$  υπερिशύει του  $\rho_T$  γεγονός που οδηγεί σε TCR,  $\alpha \ll 1/273$

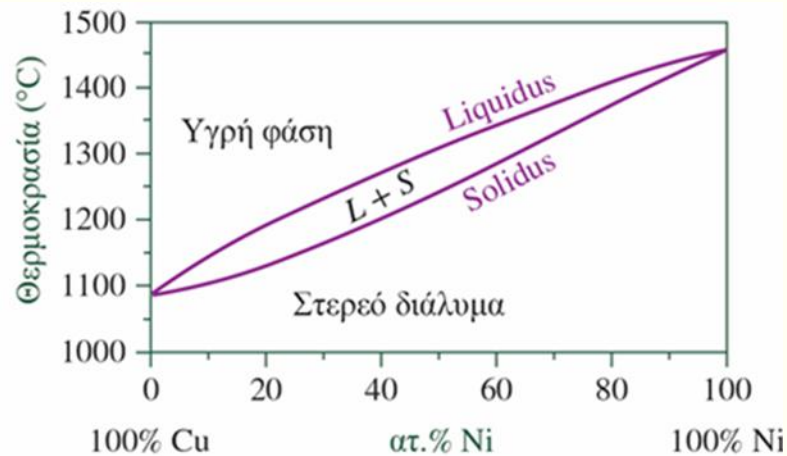
## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στη χρωμονικελίνη (ή νιχρώμιο - nichrome), κράμα 80%Ni-20%Cr,  
 $\rho_{Nichrome} = 16 \times \rho_{Ni}$

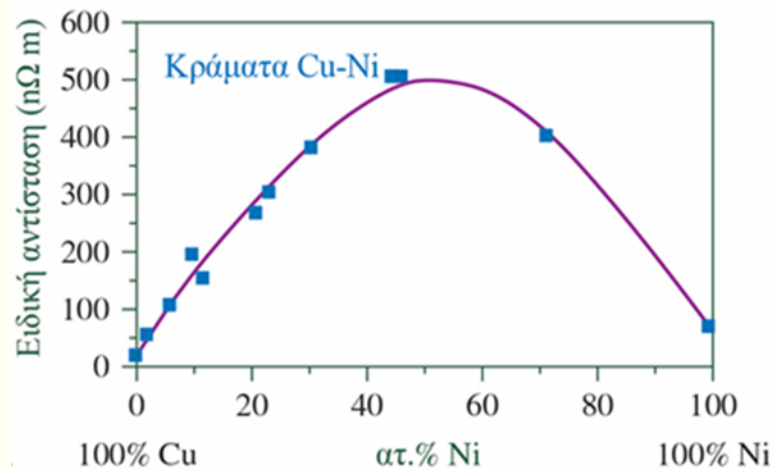
Nichrome : Χρησιμοποιείται για κατασκευή θερμαντικών στοιχείων (γιατί;)

Υλικό	Ειδική αντίσταση στους 20°C ( $n\Omega m$ )	$\alpha$ στους 20°C (1/K)
Νικέλιο	69	$\frac{1}{156} = 0.0064$
Χρώμιο	129	$\frac{1}{330} = 0.0030$
Χρωμονικελίνη ή Νιχρώμιο (80%Ni-20%Cr)	1100	$\frac{1}{2500} = 0.0004$ 12

# Επίδραση της κραμάτωσης στην ειδική αντίσταση – Η περίπτωση χαλκού-νικελίου



(α)



(β)

Εικ. (α): διάγραμμα φάσεων κράματος Cu-Ni

- Πάνω από τη γραμμή Liquidus, υπάρχει μόνο υγρή φάση
- Περιοχή L+S: συνύπαρξη υγρής και στερεάς φάσης
- Κάτω από τη γραμμή Solidus, υπάρχει μόνο στερεό ισόμορφο κράμα με τη δομή Cu και Ni (FCC)
- Τυχαία ανάμιξη ατόμων Cu και Ni

Εικ. (β): ειδική αντίσταση κράματος Cu-Ni σαν συνάρτηση της περιεκτικότητας σε Ni (at%) σε RT

- Προσθέτοντας Ni η συνεισφορά  $\rho_I$  στη σχέση της ειδικής αντίστασης ( $\rho = \rho_T + \rho_I$ ) αυξάνεται
- Στο άκρο (100% Ni), έχουμε πάλι καθαρό μέταλλο (μικρή ειδική αντίσταση)
- Η καμπύλη  $\rho = \rho(at\%Ni)$  πρέπει να διέρχεται από μέγιστο ( $\sim 50\%at Ni$ )

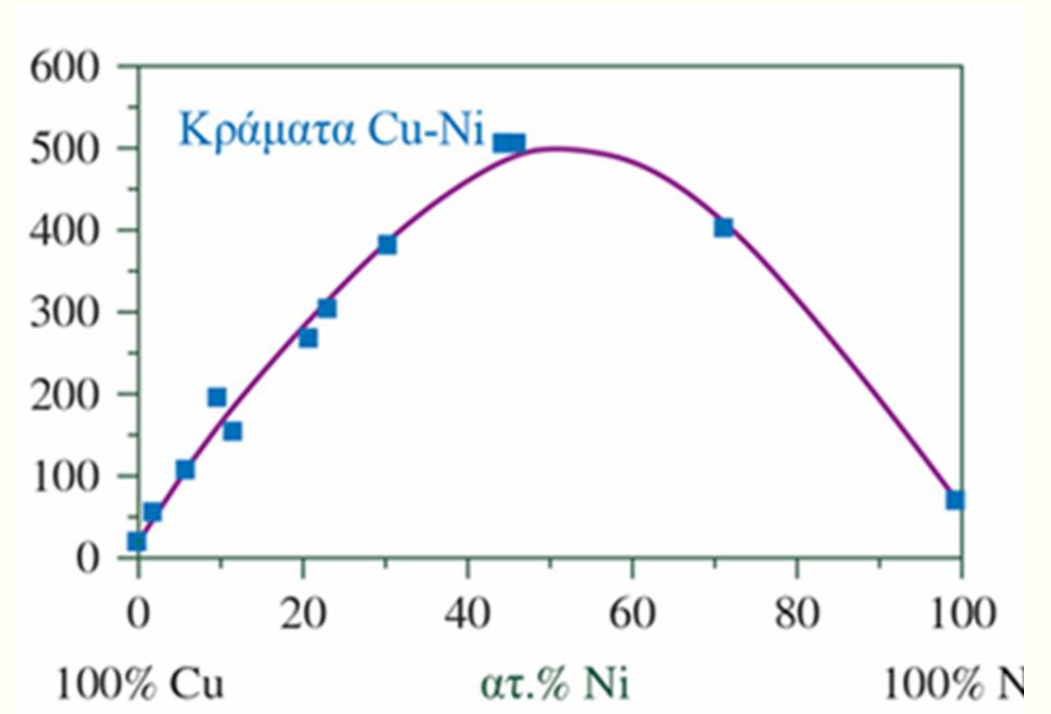
# Κανόνας Nordheim για στερεά διαλύματα

- Ημι-εμπειρική εξίσωση

$$\rho_I = CX(1 - X)$$

$X$  το ατομικό ποσοστό του διαλυμένου σώματος  
 $C$  σταθερά, ο **συντελεστής Nordheim** (Nordheim coefficient)

- Ο κανόνας Nordheim υποθέτει τυχαία κατανομή των ατόμων του διαλυμένου μετάλλου στο πλέγμα
- Επίσης, υποθέτει ότι η κραμάτωση δεν μεταβάλλει σημαντικά τον αριθμό ηλεκτρονίων αγωγιμότητας ανά άτομο
- Για μικρές ποσότητες προσμίξεων, πειραματικά φαίνεται ότι  $\rho_I \propto X$  (βλ. εικ., ίσα βήματα αύξησης  $\rho_I$  με προσθήκη 1.12%Ni και 2.16%Ni)
- Σε συμφωνία με κανόνα Nordheim,  $\rho_I = CX$  για  $X \ll 1$





Πίνακας τιμών του συντελεστή Nordheim (στους 20°C) για κράματα χαλκού (Cu matrix) και χρυσού (Au matrix) χαμηλής περιεκτικότητας στοιχείων, όπως λαμβάνονται από τη σχέση  $\rho_I = CX$  και  $X < 1at\%$

<b>Solute in Solvent (element in matrix)</b>	<b><math>C</math> (nΩ m)</b>	<b>Maximum Solubility at 25 °C (at.%)</b>
Au in Cu matrix	5500	100
Mn in Cu matrix	2900	24
Ni in Cu matrix	1200	100
Sn in Cu matrix	2900	0.6
Zn in Cu matrix	300	30
Cu in Au matrix	450	100
Mn in Au matrix	2410	25
Ni in Au matrix	790	100
Sn in Au matrix	3360	5
Zn in Au matrix	950	15

- Για πολλά ισομορφικά κράματα η τιμή της σταθεράς  $C$  μπορεί να είναι διαφορετική σε υψηλότερες συγκεντρώσεις  $X$

## Διορθώσεις στον κανόνα Nordheim

---

- Ο κανόνας Nordheim,  $\rho_I = CX(1 - X)$ , υποθέτει ότι η κραμάτωση δεν μεταβάλλει σημαντικά τον αριθμό ηλεκτρονίων αγωγιμότητας ανά άτομο
- Αυτό ισχύει για κράματα στοιχείων του ίδιου σθένους (ίδια στήλη ΠΠ). Παράδειγμα: Cu-Au, Ag-Au
- Για κράματα στοιχείων διαφορετικού σθένους, π.χ., ορείχαλκος (κράμα Cu-Zn), με σθένος  $Zn^{+2}$ , καθώς αυξάνεται το ποσοστό του δισθενούς στοιχείου αυξάνεται η συγκέντρωση ελευθέρων ηλεκτρονίων
- Σ'αυτές τις περιπτώσεις, ο κανόνας Nordheim υπερεκτιμά την ειδική αντίσταση  $\rho$
- Ο κανόνας Nordheim γράφεται

$$\rho_I = C_{eff}X(1 - X)$$

όπου  $C_{eff}$  διορθωμένη τιμή του συντελεστή. Μειώνεται με την αύξηση της συγκέντρωσης της δισθενούς πρόσμειξης



# Συνδυασμός κανόνων Nordheim και Matthiessen

---

$$\rho = \rho_{matrix} + CX(1 - X)$$

όπου,  $\rho_{matrix} = \rho_T + \rho_R$

$\rho_{matrix}$  η ειδική αντίσταση της μητρικής δομής που οφείλεται στη σκέδαση λόγω θερμικών ταλαντώσεων (όρος  $\rho_T$ ) και λόγω άλλων ατελειών (όρος  $\rho_R$ ) αλλά με απουσία κραματικών στοιχείων.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.11 Εκτίμηση TCR στο κράμα νιχρωμίου (80 at% Ni – 20 at% Cr)

Χρησιμοποιώντας τις τιμές της ειδικής αντίστασης των Ni ( $\rho_{Ni} = 69 \times 10^{-9} \Omega \text{ m}$ ) και νιχρωμίου ( $\rho_{NiCr} = 1100 \times 10^{-9} \Omega \text{ m}$ ) και το συντελεστή TCR του Ni ( $\alpha_{Ni} = 0.0064 \text{ 1/K}$ ), υπολογίστε το συντελεστή TCR του νιχρωμίου.

### ΛΥΣΗ

Από το συνδυασμό των κανόνων Nordheim και Matthiessen,  $\rho = \rho_{matrix} + CX(1 - X)$ , η ειδική αντίσταση του κράματος nichrome γράφεται

$$\rho_{NiCr} = \rho_{Ni} + C_{NiCr} X(1 - X)$$

$X$  η ατ.% συγκέντρωση του Cr στο κράμα.

Από τον ορισμό του συντελεστή TCR,  $\alpha = \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dT} \right)$ , γράφουμε

$$\alpha_{NiCr} = \frac{1}{\rho_{NiCr}} \left( \frac{d\rho_{NiCr}}{dT} \right) = \frac{1}{\rho_{NiCr}} \left( \frac{d\rho_{Ni}}{dT} \right) = \frac{\rho_{Ni}}{\rho_{NiCr}} \left( \frac{d\rho_{Ni}}{\rho_{Ni} dT} \right)$$
$$\alpha_{NiCr} = \frac{\rho_{Ni}}{\rho_{NiCr}} \alpha_{Ni}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές, βρίσκουμε

$$\alpha_{NiCr} = \frac{(69 \text{ n}\Omega \text{ m})}{(1100 \text{ n}\Omega \text{ m})} (0.0064 \text{ K}^{-1}) = 0.0004 \text{ K}^{-1}$$

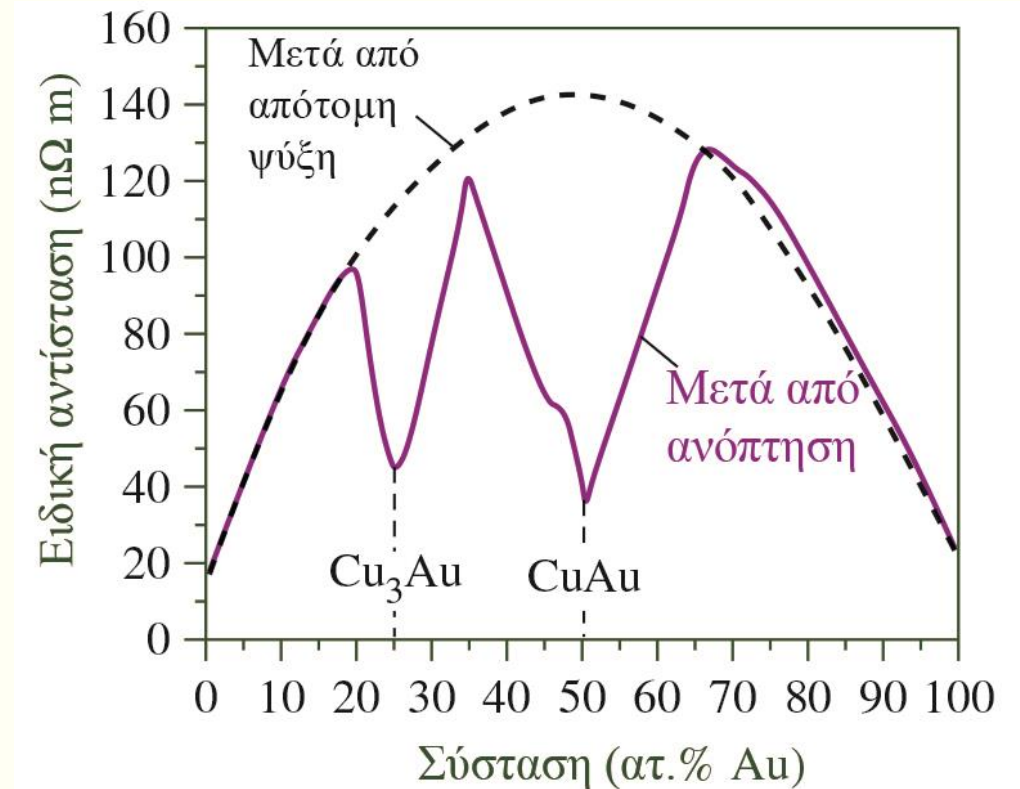
# Ειδικές περιπτώσεις κραμάτων με διατεταγμένη δομή

- Για ορισμένες συγκεντρώσεις συγκεκριμένων κραμάτων, το στερεό, μετά από διαδικασία αργής ψύξης, έχει διατεταγμένη δομή
- Τα άτομα των δύο στοιχείων καταλαμβάνουν κανονικά διατεταγμένες θέσεις

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Κράμα 75%Cu-25%Au (ένωση  $\text{Cu}_3\text{Au}$ )
2. Κράμα 50%Cu-50%Au (ένωση  $\text{CuAu}$ )

- Τέτοιες συστάσεις θεωρούνται καθαρές ενώσεις
- Η ειδική αντίστασή τους είναι μικρότερη από αυτή κράματος της ίδιας σύστασης που ψύχθηκε απότομα από τη κατάσταση τήγματος (εικ.)



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.10 Εκτίμηση τιμής $\rho_{(90 \text{ wt\% Au}-10 \text{ wt\% Cu})}$ με τον κανόνα Nordheim

Το κράμα 90 κ.β.% Au–10 κ.β.% Cu χρησιμοποιείται για ηλεκτρικές επαφές χαμηλής dc τάσης (electrical contacts). Η μικρή πρόσμειξη Cu αυξάνει τη μηχανική σκληρότητα του Au χωρίς να μειώνει την αντίστασή του στη διάβρωση. Θεωρώντας την ειδική αντίσταση του χρυσού στα 22.8 nΩ m, εκτιμήστε την ειδική αντίσταση του κράματος 90 κ.β.% Au–10 κ.β.% Cu.

### ΛΥΣΗ

$$\rho(X) = \rho_{Au} + CX(1 - X)$$

όπου,  $\rho_{Au} = 22.8 \text{ n}\Omega \text{ m}$

Μετατρέπουμε το ποσοστό 10 κ.β.% Cu σε ατομικό ποσοστό  $X$

$$X = \frac{w/M_{Cu}}{w/M_{Cu} + (1 - w)/M_{Au}} = \frac{0.1/63.55}{0.1/63.55 + 0.9/197} = 0.256$$

Αντικαθιστώντας

$$\rho_{(90 \text{ wt\% Au}-10 \text{ wt\% Cu})} = (22.8 \text{ n}\Omega \text{ m}) + (450 \text{ n}\Omega \text{ m})(0.256)(1 - 0.256) = 108.5 \text{ n}\Omega \text{ m}$$

Σε σχέση με την πειραματική τιμή 108 nΩ m η απόκλιση είναι μόλις 0.5%

# Ετερογενή μίγματα

---

- Ο κανόνας Nordheim,  $\rho(X) = \rho_{matrix} + CX(1 - X)$ , ισχύει μόνο για μονοφασικά στερεά διαλύματα (ομογενή μίγματα)
- Σε πολυφασικά στερεά μίγματα, συμπεριλαμβανομένων των σύνθετων υλικών (π.χ., υλικά που περιέχουν υαλονήματα ή ανθρακονήματα), ο καθορισμός της ειδικής αντίστασης σχετίζεται με το πρόβλημα υπολογισμού των ενεργών (συνολικών) τιμών για τη διηλεκτρική σταθερά, τη θερμική αγωγιμότητα, το μέτρο ελαστικότητας, το λόγο Poisson, κ.α.
- Στην πράξη, πολλοί από τους κανόνες ανάμειξης είναι πανομοιότυποι.

# Ενεργός ειδική αντίσταση υλικών με δύο διακριτές φάσεις σε διαστρωματωμένη δομή – Διάταξη φάσεων σε σειρά

Έστω  $L$  το μήκος και  $A$  η επιφάνεια διατομής του υλικού,

$\alpha$  και  $\beta$  οι δύο φάσεις διατεταγμένες σε στρώματα σε σειρά

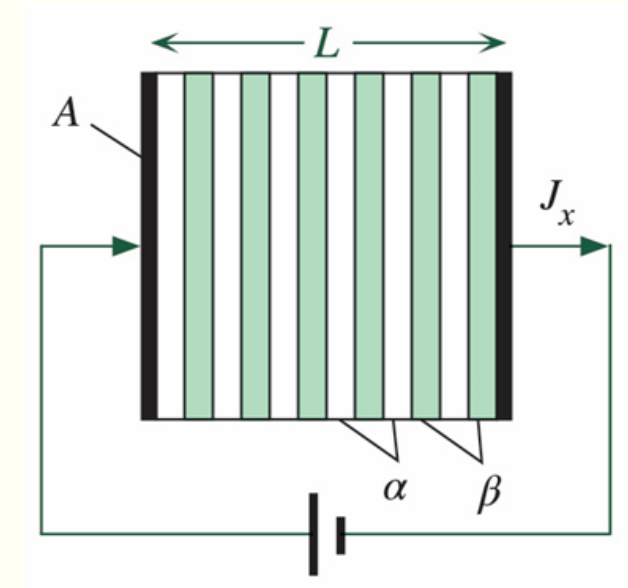
Υπολογισμός της ενεργού (ολικής) αντίστασης για ρεύμα κάθετα στη διαστρωμάτωση (διεύθυνση  $x$ )

$$R_{eff} = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i L_i}{A} = \frac{\rho_\alpha L_\alpha}{A} + \frac{\rho_\beta L_\beta}{A}$$

όπου,  $L_\alpha$  το συνολικό πάχος των στρωμάτων της φάσης  $\alpha$ ,

και  $L_\beta$  το συνολικό πάχος των στρωμάτων της φάσης  $\beta$

Προφανώς,  $L_\alpha + L_\beta = L$



## Ενεργός ειδική αντίσταση υλικών με δύο διακριτές φάσεις σε διαστρωματωμένη δομή – Διάταξη φάσεων σε σειρά (συνέχεια)

Ορίζοντας την ενεργό (ολική) ειδική αντίσταση (effective resistivity),  $\rho_{eff}$ , με τη σχέση

$$R_{eff} = \frac{\rho_{eff}L}{A}$$

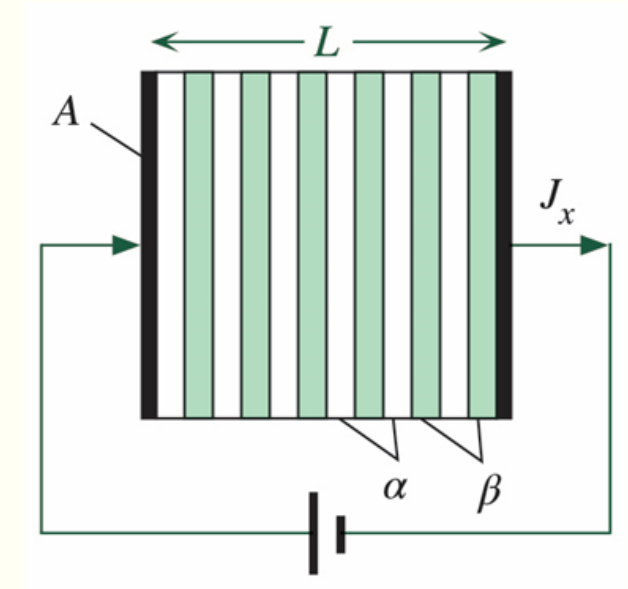
Αντικαθιστώντας στη σχέση

$$R_{eff} = \frac{\rho_{\alpha}L_{\alpha}}{A} + \frac{\rho_{\beta}L_{\beta}}{A}$$

Καταλήγουμε στον **κανόνα ανάμειξης για την ειδική αντίσταση** (resistivity-mixture rule) ή **κανόνας ανάμειξης σε σειρά** (series rule of mixtures):

$$\rho_{eff} = \chi_{\alpha}\rho_{\alpha} + \chi_{\beta}\rho_{\beta}$$

όπου,  $\chi_{\alpha} = L_{\alpha}/L$  και  $\chi_{\beta} = L_{\beta}/L$



## Ενεργός ειδική αντίσταση υλικών με δύο διακριτές φάσεις σε διαστρωματωμένη δομή – Παράλληλη διάταξη φάσεων

Η ολική αγωγιμότητα ( $G = 1/R$ ) του διαστρωματωμένου υλικού για ρεύμα παράλληλα στη διαστρωμάτωση (διεύθυνση  $y$ ) είναι

$$G_{eff} = \sum_{i=1}^n G_i = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i A_i}{L} = \frac{\sigma_\alpha A_\alpha}{L} + \frac{\sigma_\beta A_\beta}{L}$$

$A_\alpha$  το συνολικό εμβαδόν διατομής των στρωμάτων της φάσης  $\alpha$ ,

$A_\beta$  το συνολικό εμβαδόν διατομής των στρωμάτων της φάσης  $\beta$

Προφανώς,  $A_\alpha + A_\beta = A$

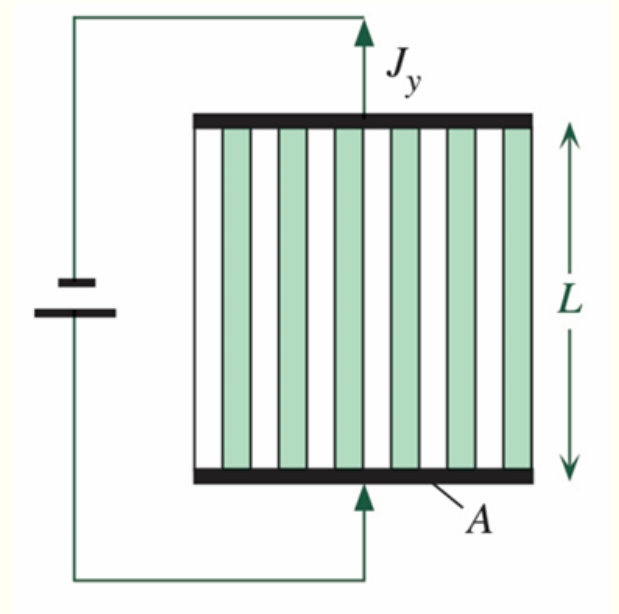
Ορίζοντας την **ενεργός ειδική αγωγιμότητα** (conductivity),  $\sigma_{eff}$ , με τη σχέση

$$G_{eff} = \frac{\sigma_{eff} A}{L}$$

αντικαθιστώντας, προκύπτει ο **κανόνας ανάμειξης για την ειδική αγωγιμότητα** (conductivity-mixture rule) :

$$\sigma_{eff} = \chi_\alpha \sigma_\alpha + \chi_\beta \sigma_\beta$$

όπου,  $\chi_\alpha = A_\alpha/A$  και  $\chi_\beta = A_\beta/A$





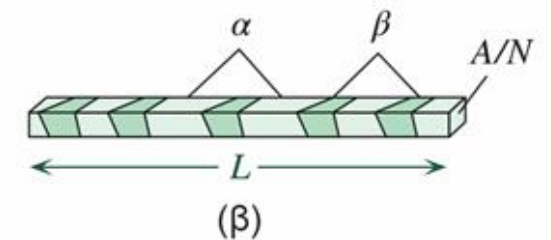
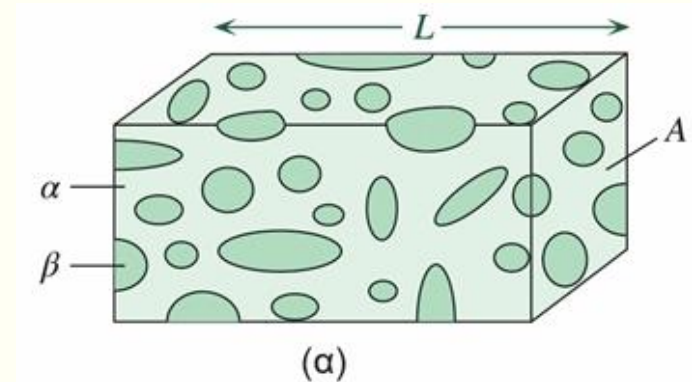
# Ενεργός ειδική αντίσταση υλικών με δύο διακριτές φάσεις – Διεσπαρμένες φάσεις μέσα σε συνεχές πλέγμα

Όταν οι ειδικές αντιστάσεις των δυο τυχαία αναμεμιγμένων φάσεων δεν διαφέρουν σημαντικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε προσεγγιστικά τον κανόνα ανάμιξης σε σειρά.

Εικ. (α): Διφασικό κράμα αποτελούμενο από τις τυχαία αναμεμιγμένες φάσεις  $\alpha$  και  $\beta$  με τιμές της ειδικής αντίστασης  $\rho_\alpha$  και  $\rho_\beta$ , αντίστοιχα.

Έστω  $\chi_\alpha = V_\alpha/V$  και  $\chi_\beta = V_\beta/V$  τα ποσοστά όγκου των δύο φάσεων (προφανώς,  $\chi_\alpha + \chi_\beta = 1$ ).

Μπορούμε να διαιρέσουμε το υλικό σε  $N$  τμήματα παράλληλων ινών μήκους  $L$  και εμβαδού διατομής  $A/N$  [εικ. (β)].



## Ενεργός ειδική αντίσταση υλικών με δύο διακριτές φάσεις – Διεσπαρμένες φάσεις μέσα σε συνεχές πλέγμα (συνέχεια)

Σε μια τέτοια απείρως λεπτή ίνα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι φάσεις  $\alpha$  και  $\beta$  βρίσκονται διαταγμένες σε σειρά [εικ. (β)]

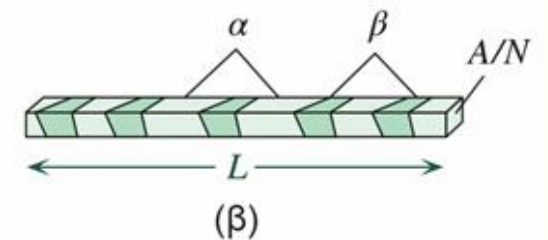
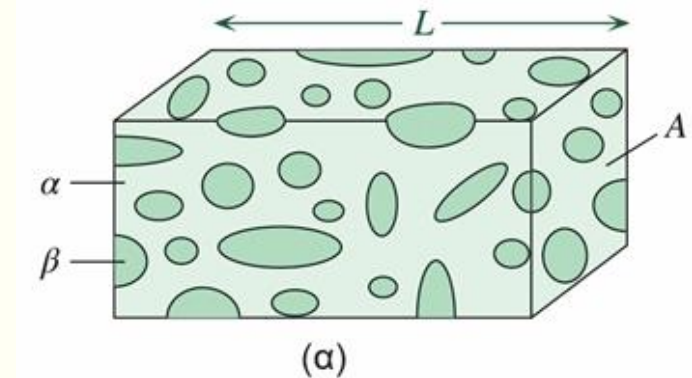
Τα συνολικά πάχη  $L_\alpha$  και  $L_\beta$  των δύο φάσεων προφανώς είναι  $L_\alpha = \chi_\alpha L$  και  $L_\beta = \chi_\beta L$

Οπότε η αντίσταση της ίνας (fiber) μπορεί να γραφεί

$$R_{fiber} = \frac{\rho_\alpha L_\alpha}{(A/N)} + \frac{\rho_\beta L_\beta}{(A/N)} = \frac{\rho_\alpha (\chi_\alpha L)}{(A/N)} + \frac{\rho_\beta (\chi_\beta L)}{(A/N)}$$

Η αντίσταση  $R_{solid}$  του στερεού (solid) συνολικά [εικ. (α)] μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας το σύστημα των  $N$  ινών σε παράλληλη σύνδεση (γιατί;), οπότε  $R_{solid} = R_{fiber}/N$  (γιατί;)

$$R_{solid} = \frac{R_{fiber}}{N} = \frac{\rho_\alpha \chi_\alpha L}{A} + \frac{\rho_\beta \chi_\beta L}{A}$$



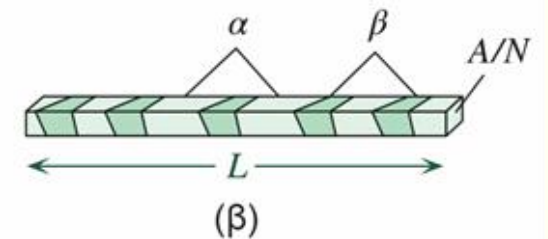
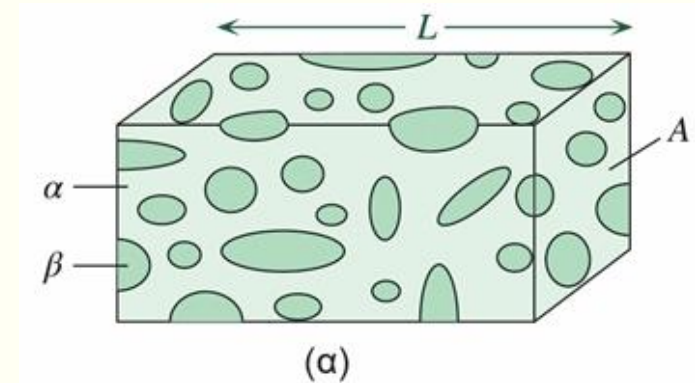
# Ενεργός ειδική αντίσταση υλικών με δύο διακριτές φάσεις – Διεσπαρμένες φάσεις μέσα σε συνεχές πλέγμα (συνέχεια)

Εξ' ορισμού  $R_{solid} = \rho_{eff} L/A$ , οπότε

$$\frac{\rho_{eff} L}{A} = \frac{\rho_{\alpha} \chi_{\alpha} L}{A} + \frac{\rho_{\beta} \chi_{\beta} L}{A}$$

Επομένως, η ενεργός (συνολική) ειδική αντίσταση για τυχαία αναμεμειγμένο διφασικό στερεό δίνεται από τη σειριακή σχέση

$$\rho_{eff} = \rho_{\alpha} \chi_{\alpha} + \rho_{\beta} \chi_{\beta}$$



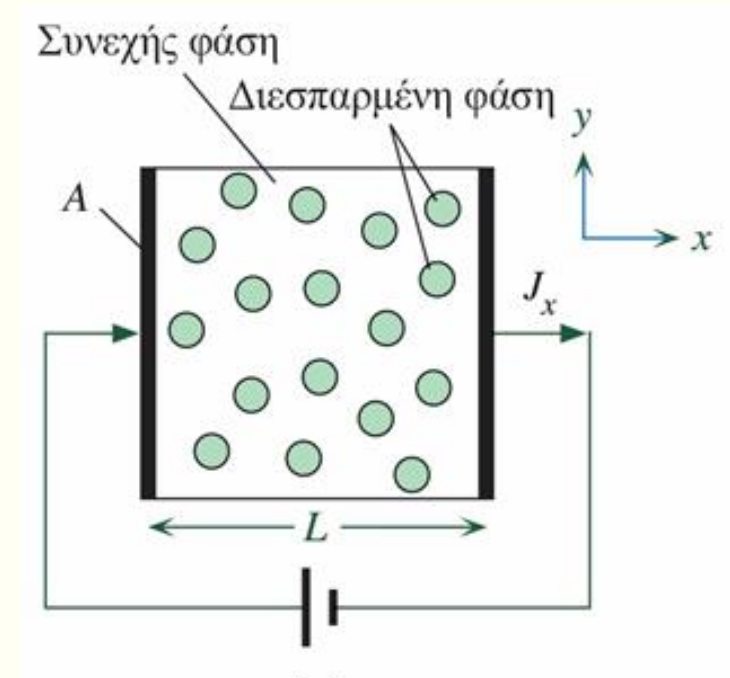
# Ενεργός ειδική αντίσταση υλικών με δύο διακριτές φάσεις – Διεσπαρμένες φάσεις μέσα σε συνεχές πλέγμα

Για μίγμα με τυχαία διεσπαρμένες φάσεις με μεγάλη διαφορά ειδικών αντιστάσεων ισχύει ο γενικός κανόνας των Reynolds & Hough

$$\frac{\sigma_{eff} - \sigma_c}{\sigma_{eff} + 2\sigma_c} = \chi \frac{\sigma_d - \sigma_c}{\sigma_d + 2\sigma_c}$$

όπου,  $\sigma_c$  η αγωγιμότητα της συνεχούς (continuous) φάσης

$\sigma_d$  και  $\chi$  η αγωγιμότητα και το ποσοστό όγκου, αντίστοιχα, της διεσπαρμένης (dispersed) φάσης μέσα στη συνεχή (Εικ.)



A. Για  $\sigma_d \ll \sigma_c$ , η σχέση Reynolds & Hough καταλήγει στη  $\sigma_{eff} = \sigma_c \frac{(1-\chi)}{(1+\frac{1}{2}\chi)}$  (γιατί;)

B. Για  $\sigma_d \gg \sigma_c$ , η σχέση Reynolds & Hough καταλήγει στη  $\sigma_{eff} = \sigma_c \frac{(1+2\chi)}{(1-\chi)}$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.15 Εκτίμηση τιμής $\rho$ σε πορώδες υλικό

Να υπολογιστεί η ενεργός ειδική αντίσταση του μπρούτζου 95/5 (95% Cu-5% Sn), που κατασκευάζεται από κονία μετάλλου και περιέχει διεσπαρμένους πόρους αέρα σε ποσοστό 15%κ.ο. Θεωρήστε  $\rho_{95/5} = 10^{-7} \Omega m$ .

### ΛΥΣΗ

Δεδομένου ότι ο αέρας έχει απείρως μεγαλύτερη αντίσταση ( $\rho_{air} = \infty$ ) συγκριτικά με το μπρούτζο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα των Reynolds & Hough στη μορφή

$$\sigma_{eff} = \sigma_c \frac{(1-\chi)}{\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right)}$$

ή

$$\rho_{eff} = \rho_c \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right)}{(1-\chi)}$$

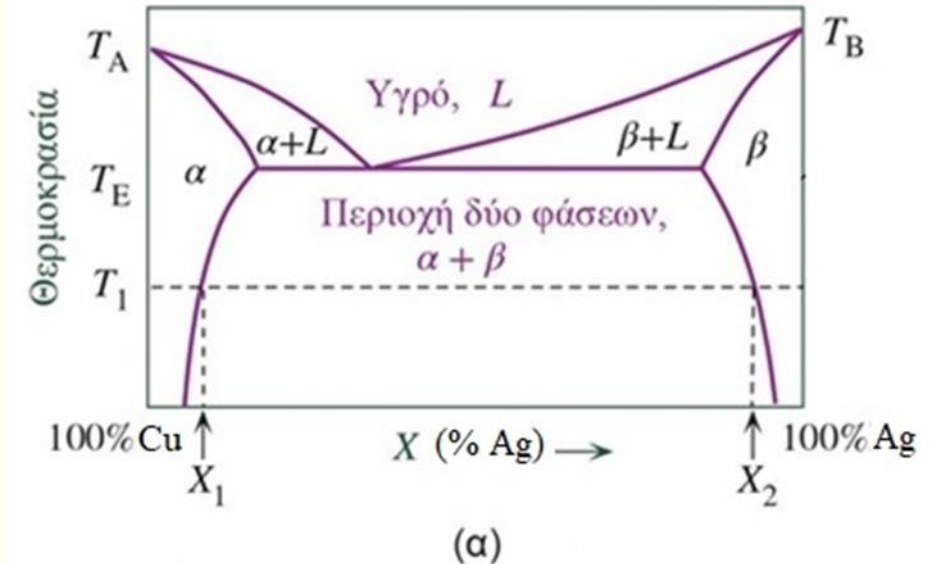
που ισχύει για  $\sigma_d \ll \sigma_c$  ( $\rho_d \gg \rho_c$ )

$$\rho_{eff} = (10^{-7} \Omega m) \frac{1 + \frac{1}{2}(0.15)}{1 - (0.15)} = \mathbf{1.27 \times 10^{-7} \Omega m}$$

# Ειδική αντίσταση διφασικών κραμάτων

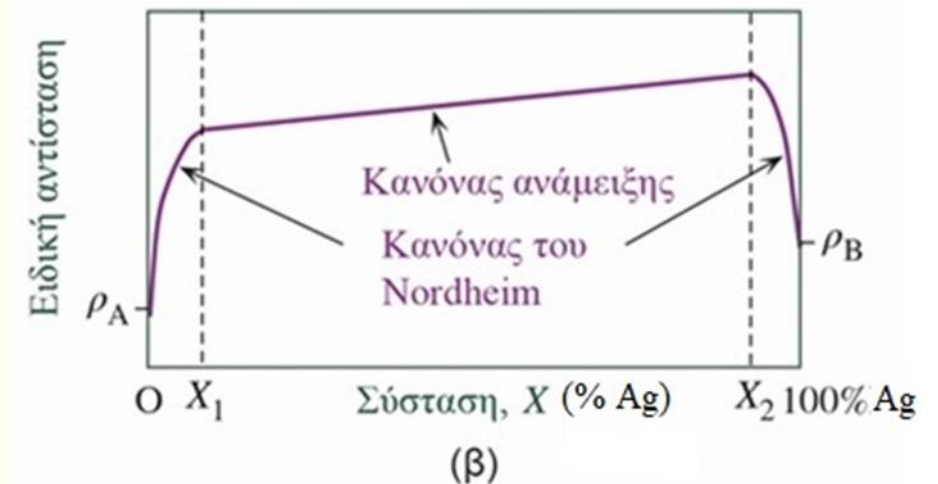
Εικ. (α): Διάγραμμα φάσεων διμερούς ευτηκτικού κράματος A-B: Το παράδειγμα Cu-Ag\*

- Σε μικρά ποσοστά ανάμιξης επιδεικνύουν μονοφασική κραματική δομή
  - φάση  $\alpha$  για  $X \rightarrow 100\%A$ ,
  - φάση  $\beta$  για  $X \rightarrow 100\%B$
- Στο μεγαλύτερο εύρος συστάσεων σχηματίζουν ετερογενές μίγμα δύο φάσεων  $\alpha$  και  $\beta$



Εικ. (β): Η ειδική αντίσταση συναρτήσσει της συστάσεως  $X$

- Για  $0 < X < X_1$  ( $X_1 =$  όριο διαλυτότητας  $Ag$  σε  $Cu$ ), ισόμορφο στερεό στη φάση  $\alpha$ 
  - αύξηση του  $X(\%Ag) \rightarrow$  αύξηση τιμής  $\rho$  (Κανόνας Nordheim)

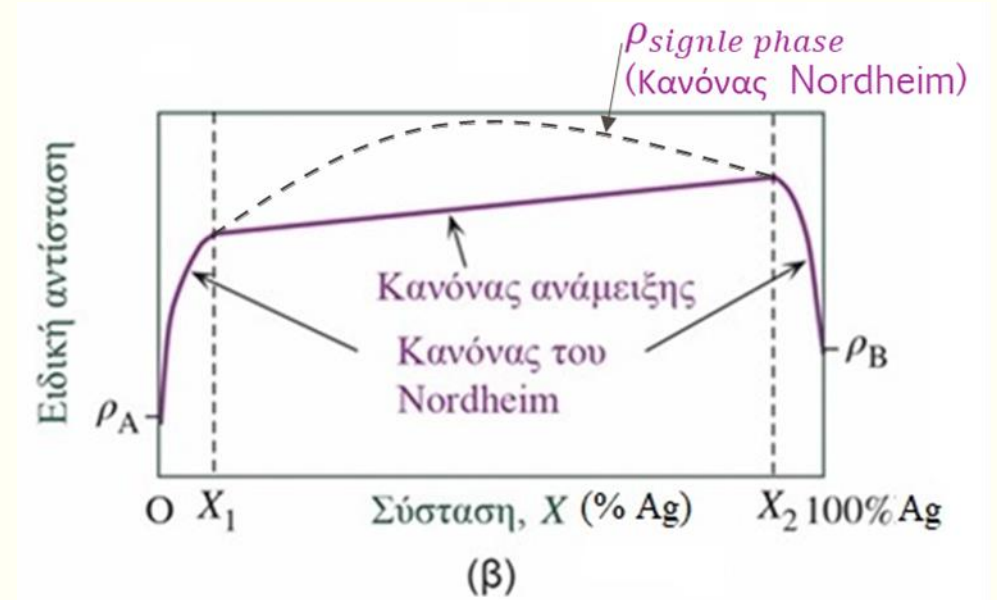


Συνέχεια  $\rightarrow$

\* Άλλο παράδειγμα: Pb-Sn

## Ειδική αντίσταση διφασικών κραμάτων (συνέχεια)

- Στο άλλο άκρο, για  $X_2 < X \leq 100\%$  ( $X_2 =$  όριο διαλυτότητας  $Cu$  σε  $Ag$ ), ισόμορφο στερεό στη φάση  $\beta$ 
  - μείωση του  $X(\%Ag)$  από  $100\%$  (δηλ., προσθήκη περισσότερου  $Cu$  σε  $Ag$ )  $\rightarrow$  αύξηση τιμής  $\rho$  (Κανόνας Nordheim)
- Ενδιάμεσες συστάσεις,  $X_1 < X \leq X_2$ , μίγμα φάσεων  $\alpha$  και  $\beta$  (διφασικό στερεό)
  - Κανόνας ανάμειξης  $\rho_{eff} = \rho_\alpha \chi_\alpha + \rho_\beta \chi_\beta$
  - $\rho < \rho_{single\ phase}$





# Ηλεκτρικές εφαρμογές μεταλλικών κραμάτων

---

## A. Υλικά για κατασκευή μεταλλικών αγωγών (καλώδια)

- Cu: ευρύτατα χρησιμοποιούμενο υλικό λόγω ηλεκτρικών και θερμικών ιδιοτήτων
  - Χαλκός υψηλής ειδικής αγωγιμότητας (χαμηλή περιεκτικότητα σε O και προσμείξεις)
- Al: μόνο για μεταλλικούς αγωγούς
  - $\sigma_{Al} = 0.6 \sigma_{Cu}$
  - φθηνότερο υλικό

## B. Υλικά για κατασκευή ηλεκτρικών επαφών σε διακοπτικές διατάξεις

- Ag: πολύ υψηλότερη ηλεκτρική και θερμική αγωγιμότητα (ιδανικό για διακόπτες)
  - Υψηλό κόστος
  - Σε κράμα με διάφορα μέταλλα χρησιμοποιείται για διακοπτικές επαφές για ρεύματα ως 600 A
  - Ag-Ni για επαφές διακοπών στις συσκευές οικιακής χρήσης
- Au, Pt, Pd: εξαιρετική ανθεκτικότητα στη διάβρωση
  - Σε κράμα με Ag, για ηλεκτρικές επαφές ειδικών εφαρμογών υψηλών προδιαγραφών