Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής
Γραμμική Άλγεβρα
6η Διάλεξη
Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Ζ.Καλογηράτου

Ιδιοτιμή - ιδιοδιάνυσμα γραμμικής απεικόνισης

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα F και $f : V \to V$ γραμμικός μετασχηματισμός. Ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$ για το οποίο υπάρχει $u \in V$, $u \neq 0$, ώστε να ισχύει

$$f(u) = \lambda u$$

καλείται ιδιοτιμή ή χαρακτηριστική τιμή του f.
Το διάνυσμα $u \in V$ καλείται ιδιοδυάνυσμα ή χαρακτηριστικό διάνυσμα του f.

Ιδιοτιμή - Ιδιοδιάνυσμα πίνακα

Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων διάστασης $n \times n$ με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$ (όπου F είναι είτε το σύνολο των πραγματικών είτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών), τότε το στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$ καλείται ιδιοτιμή του πίνακα A αν υπάρχει $u \in \mathbb{F}^n$, $u \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$Au = \lambda u$$

Το διάνυσμα $u \in V$ καλείται ιδιοδυάνυσμα ή χαρακτηριστικό διάνυσμα του A.

Δηλαδή ιδιοτιμές του πίνακα A είναι εκείνα τα λ για τα οποία το ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda I_n)u = 0$$

έχει και μη μηδενική λύση.

Ιδιοτιμές Ιδιοδιανύσματα

Για να έχει ένα ομογενές γραμμικό σύστημα λύση διάφορη της μηδενικής πρέπει η ορίζουσα του πίνακα να είναι ίση με το μηδέν. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι τα λ για τα οποία

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο - εξίσωση

Το πολυώνυμο

$$\phi(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ (συνεπώς ένας πίνακας μπορεί να έχει και μιγαδικές ιδιοτιμές). Το πολυώνυμο αυτό καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο (χ.π.) του A και η εξίσωση $\phi(\lambda) = 0$ καλείται χρακτηριστική εξίσωση του A.

Ιδιοτιμές Ιδιοδιανύσματα

Για μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ το χ.π. είναι το αυτό του πίνακα αναπαράστασης $(f : \widehat{a}, \widehat{a})$ της f ώς προς μια διατεταγμένη βάση $\widehat{a}$ του V.

Το χ.π. είναι ανεξάρτητο της διατεταγμένης βάσης.

Αν $\mathbb{F} \equiv \mathbb{C}$ είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών το οποίο είναι αλγεβρικά κλειστό τότε ο πίνακας A έχει πάντα ιδιοτιμές.

Το $\mathbb{C}$ περιέχει όλες τις ιδιοτιμές τις ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ του χ.π. και γράφεται

$$\phi(\lambda) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$$

με

$$m_1 + m_2 + \cdots m_k = n.$$

Οι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A και $m_1, m_2, \ldots, m_k$ είναι οι πολλαπλότητες τους (σαν ρίζες του χ.π.).

Αν το $\mathbb{F}$ δεν είναι αλγεβρικά κλειστό $\mathbb{F} \equiv \mathbb{R}$ τότε το χ.π. μπορεί να μην έχει λύσεις. Τότε το χ.π. δεν αναλύεται σε γίνόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων όπως παραπάνω.

Τα ακόλουθα ισχύουν για το χ.π. ενός πίνακα

- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A και του ανάστροφου του A^T συμπίπτουν.
- Δύο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Τότε $a_0 = (-1)^n \det A$, $a_{n-1} = -trA$ και $a_n = 1$.
- (*Θεώρημα Cayley - Hamilton*) Κάθε τετραγωνικός πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο ($\varphi(A) = 0$).

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

- Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών

$$det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

- Το ίχνος ενός πίνακα είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών του

$$trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

Ιδιοτιμές Ιδιοδιανύσματα

- Οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού (διαγώνιου) πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
- Το χ.π. ενός block τριγωνικού (block διαγώνιου) πίνακα είναι ίσο με το γινόμενο των χ.π. των διαγώνιων blocks.
- Ενας πίνακας είναι αντιστρέψιμος να και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη μηδενικές.
- Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τότε ο λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν ο $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.
- Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του A και u το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε το $f(\lambda)$ είναι μια ιδιοτιμή του $f(A)$ και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το u.

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Πίνακα

Ελάχιστο πολυώνυμο

Ένα πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}(x)$, $p(x) \neq 0$, που μηδενίζεται από τον πίνακα A και

- έχει τον πρώτο συντελεστή του μονάδα
- κάθε πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον A έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με αυτόν του $p(x)$,

καλείται ελάχιστο πολυώνυμο του A.

- Κάθε πίνακας έχει ένα ελάχιστο πολυώνυμο και είναι μοναδικό.
- Το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί κάθε πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον A, συνεπώς διαιρεί και το ελάχιστο πολυώνυμο.
- Το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα έχουν τις ίδιες ρίζες.
- Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ που έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο συμπίπτουν.

Ιδιόχωρος

Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε ο υπόχωρος

$$V(\lambda) = u \in \mathbb{F}^n | Au = \lambda u$$

καλείται ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

- Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ.
- Ισχύει $\dim(V(\lambda)) \leq m(\lambda)$ όπου $m(\lambda)$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του $(x-\lambda)$ η οποία διαιρεί το χ.π. (ή η πολλαπλότητα της λ στο χ.π.).
- Επιπλέον $\dim(V(\lambda)) = n - r(A - \lambda I)$.

Άσκηση 1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(1+\lambda)(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) - 6(1-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 \\
&= -(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Πίνακα

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει 3 διακεκριμένες ρίζες άρα οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$$

Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα u_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -3$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$A - \lambda_1 I = 0$$

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I &= A - (-3)I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

εφαρμόζουμε την απαλοιφή του Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ας είναι $u = (x, y, z)$ τότε

$$\begin{aligned} x \qquad &+4z &= 0 \\ y \quad &-2z &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $z = k$ από όπου προκύπτει $y = 2k$ και $x = -4k$. Το ιδιοδιάνυσμα είναι

$$u = (-4k, 2k, k) = k(-4, 2, 1)$$

επιλέγουμε $k = 1$ και τότε το u_1 είναι

$$u_1 = (-4, 2, 1)$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και τα ιδιοδιανύσματα u_2 και u_3 που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_2 λ_3 και είναι

$$u_2 = (0, -6, 1), \quad u_3 = (2, 2, 1)$$

Άσκηση 2. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία του $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
Εδώ έχει ενδιαφέρον να να βρούμε τα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν στη διπλή ρίζα 1 πρέπει να λύσουμε το σύστημα $(A - I)u = 0$

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

καταλήγουμε σε μόνο μία γραμμή.
Έστω $u = (x, y, z)$ το σύστημα $(A - I)u =$ μας δίνει $x = 0$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι όλα τα στοιχεία του χώρου με πρώτη συντεταγμένη 0. Μπορούμε να πουμε ότι ο χώρος αυτός παράγεται από τα e_2 και e_3 και να θεωρήσουμε αυτά σαν τα δύο ζητούμενα ιδιοδιανύσματα.
Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $u_1 = (-2, 2, 1)$.

Άσκηση 3. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\phi(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μία πραγματική ρίζα 1 και δύο συζυγείς μιγαδικές $2 \pm i$, άρα οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 - i, \quad \lambda_3 = 2 + i$$

Εδώ έχει ενδιαφέρον να να βρούμε τα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν στις μιγαδικές ιδιοτιμές.

Θα βρούμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_2 = 2 - i$.
Μετά από γραμμοπράξεις ο πίνακας

$$A - \lambda_2 I_3 = A - (2-i)I_3 = \begin{pmatrix} 3-(2-i) & -2 & 0 \\ 0 & 2-(2-i) & -1 \\ -2 & 3 & -(2-i) \end{pmatrix}$$

γίνεται

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $u_2 = (-1-i, -i, 1)$
Εργαζόμενοι ανάλογα βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2 + i$ και είναι $u_3 = (-1+i, i, 1)$
Παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές είναι επίσης συζυγή.

Άσκηση 4. Δίνεται ο πίνακας A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(α) να βρεθούν οι ιδιοτιμές τοτ A,
(β) με τη βοήθεια του θεωρήματος Cayley - Hamilton να υπολογισθούν οι A^{-1}, A^4 και A^5.
Θα βρούμε το χ.π. του A

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda) &= \mid A-\lambda I_3 \mid = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) - (1-\lambda) = \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 2)
\end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{3}$ και $\lambda_2 = 1+\sqrt{3}$, όλες διάφορες του μηδέν άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

Το χ.π. είναι $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2$ από το θεώρημα Cayley - Hamilton έχουμε

$$A^3 - 3A^2 + 2I_3 = 0$$

πολλαπλασιάζουμε με τον A^{-1}

$$A^2 - 3A + 2A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 3A)$$

$$\begin{aligned} A^3 &= 3A^2 - 2I_3 \Rightarrow \\ A^4 &= A^3A = (3A^2 - 2I_3)A = 3A^3 - 2A = \\ &= 3(3A^2 - 2I_3) - 2A = 9A^2 - 2A - 6I_3 \Rightarrow \\ A^5 &= A^4A = (9A^2 - 2A - 6I_3)A = 9A^3 - 2A^2 - 6A = \\ &= 9(3A^2 - 2I_3) - 2A^2 - 6A = 27A^2 - 18I_3 - 2A^2 - 6A = \\ &= 25A^2 - 6A - 18I_3 \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Να δειθχεί ότι δύο όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο χ.π.
Έστω δύο πίνακες $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αφού είναι όμοιοι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$B = S^{-1}AS$$

τότε

$$\begin{aligned}
\varphi_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I) = \\
&= \det(S^{-1}AS-\lambda I) = \\
&= \det(S^{-1}AS-\lambda S^{-1}IS) = \\
&= \det(S^{-1}(A-\lambda I)S) = \\
&= \det(S^{-1})det(A-\lambda I)det(S) = \\
&= \det(A-\lambda I) = \varphi_A(\lambda)
\end{aligned}$$

Άσκηση 6. Δίνεται ο πίνακας A

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

(α) να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A,
(β) με τη βοήθεια του θεωρήματος Cayley - Hamilton να βρεθεί τύπος για τον υπολογισμό του A^n.
Θα βρούμε το χ.π. του A

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \mid A-\lambda I_3 \mid = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & 9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)((\lambda-6)(\lambda+6)+36) \\ &= -\lambda^2(\lambda-2) \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = 2$.

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Πίνακα

Από το θεώρημα Cayley - Hamilton έχουμε

$$A^3 - 2A^2 = 0 \Rightarrow A^3 = 2A^2$$

υπολογίζουμε μερικές ακόμα δυνάμεις του A

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3A = 2A^3 = 2^2A^2, \\ A^5 &= A^4A = 2^2A^2A = 2^2A^3 = 2^3A^2, \\ A^6 &= A^5A = 2^3A^2A = 2^3A^3 = 2^4A^2 \end{aligned}$$

παρατηρούμε την σχέση

$$A^n = 2^{n-2}A^2$$

η οποία αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή.

$$A^{12} = 2^{10}A^2 = 1024 \begin{pmatrix} 4 & 35 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Διαγωνποιήσιμοι Πίνακες

Αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει πραγματικές και διακριτές ιδιοτιμές τότε σε αυτές αντιστοιχούν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα που έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα

$$S = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)$$

Ισχύει

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

όπου Λ είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχειά τις ιδιοτιμές του A.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος.

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Πίνακα

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και για πραγματικές ιδιοτιμές που επαναλαμβάνονται αρκεί σε αυτές να αντιστοιχούν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
Ισχύει ακόμα και στη γενικότερη περίπτωση όπου υπάρχουν και μιγαδικές ιδιοτιμές αρκεί και πάλι να υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.