Τμήμα Πληροφορικής και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Γραμμική Άλγεβρα
1η Διάλεξη

Ζ.Καλογηράτου

Ορισμός Πίνακα

Ένας $m \times n$ πίνακας πάνω σε ένα σώμα F είναι μία ορθογώνια διευθέτηση mn στοιχείων του σώματος F σε m γραμμές και n στήλες ως εξής:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων πάνω στο σώμα F για σταθερά F, m και n συμβολίζεται με $F^{m\times n}$.
Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με πίνακες πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή, το σώμα F θα είναι είτε το σώμα των πραγματικών αριθμών $F = R$ είτε το σώμα των μιγαδικών αριθμών $F = C$.

μαζί με την i γραμμή και j στήλη

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Πίνακες

- Ο πίνακας συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα και τα στοιχεία του με το αντίστοιχο μικρό.
- Κάθε στοιχείο του πίνακα έχει δύο δείκτες ο πρώτος δηλώνει τη γραμμή και ο δεύτερος τη στήλη.
  Π.χ. το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην i γραμμή και j στήλη, το στοιχείο a_{23} βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή και στην τρίτη στήλη.
- Τα στοιχεία

$$a_{11} \quad , a_{22} \quad , \ldots \quad , a_{kk}, \quad \text{με} \;\; k = \min\{n, m\}$$

ονομάζονται **διαγώνια στοιχεία** του πίνακα ή λεμε ότι βρίσκονται πάνω στην **κύρια διαγώνιο** του πίνακα.
(Διαφορετικά a_{ij} με $i = j$)

- Δύο πίνακες $A, B \in R^{m \times n}$ λέμε ότι είναι **ίσοι** $A = B$ αν και μόνο αν ισχύει: $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε i και j

Πίνακες - Ειδικές μορφές πινάκων

- Ένας πίνακας λέγεται **πίνακας γραμμή** αν έχει μόνο μία γραμμή δηλ. $A \in F^{1\times n}$.
  π.χ.$A = (1,\ -2,\ 0,\ 5)\ \in\ F^{1\times 4}$.
- Ένας πίνακας λέγεται **πίνακας στήλη** αν έχει μόνο μία στήλη δηλ. $A \in R^{n\times 1}$.Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \in F^{3\times 1}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F^{2\times 1}.$$

- Ενας πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** αν το πλήθος των γραμμών του είναι ίσο με το πλήθος των στηλών του. Λέμε τότε ότι ο πίνακας αυτός ανήκει στον χώρο $F^{n\times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \in\ F^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in\ F^{2\times 2}$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **διαγώνιος** αν όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι μηδενικά. Δηλαδή ισχύει: $a_{i,j} = 0$ για $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Ο διαγώνιος πινακας που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με τη μονάδα λέγεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται με I_n αν ανήκει στον $R^{n \times n}$.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πίνακες - Ειδικές μορφές τετραγωνικών πινάκων

- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά. Δηλαδή ισχύει: $a_{i,j} = 0$ για $i > j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Ο πίνακας λέγεται **αυστηρά άνω τριγωνικός** αν είναι άνω τριγωνικός και τα διαγώνια στοιχεία του είναι επίσης μηδενικά.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά. Δηλαδή ισχύει: $a_{i,j} = 0$ για $i < j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Ο πίνακας λέγεται **αυστηρά κάτω τριγωνικός** αν είναι κάτω τριγωνικός και τα διαγώνια στοιχεία του είναι επίσης μηδενικά.

Ανάστροφος ενός πίνακα $A \in R^{m\times n}$ ορίζεται (και συμβολίζεται με $A^T \in R^{n\times m}$) ο πίνακας που έχει γραμμές τις στήλες του A (ή στήλες τις γραμμές του A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \in R^{3\times 2}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ -9 & 3 & -6 \end{pmatrix} \in R^{2\times 3}$$

Ισχύει ότι: $(A^T)^T = A$, δηλ. ο ανάστροφος του ανάστροφου είναι ο αρχικός πίνακας.
Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in R^{n\times n}$ λέγεται **συμμετρικός** αν ισχύει $A = A^T$ ισοδύναμα αν $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε i και j. π.χ.Αν $A \in R^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ -9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Οι διαγώνιοι πίνακες είναι συμμετρικοί. Αν ένας άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας είναι συμμετρικός τότε είναι διαγώνιος.

Έστω $A, B \in R^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

και $\lambda \in R$ ορίζονται η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός.

Πρόσθεση

Ο πίνακας $C = A + B$ έχει στοιχεία το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων A και B $(c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$ δηλ.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός

Ο πίνακας $C = \lambda A$ έχει στοιχεία τα στοιχεία του A πολλαπλασιασμένα με τον πραγματικό αριθμό λ $(c_{ij} = \lambda a_{ij})$ δηλ.

$$C = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Παραδείγμα 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Παραδείγμα 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -4 \\ 10 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Παραδείγμα 3

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & -3a \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες

1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
2. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
4. $1A = A$

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι ο $F^{m\times n}$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Ο πολλαπλασιασμός δύο πινάκων A και B ορίζεται κάτω από κάποιες προϋποθέσεις σχετικά με τη διάσταση τους.

Ειδική περίπτωση I. Θα ξεκινήσουμε με την απλή περίπτωση στην οποία ο πίνακας A είναι πίνακας γραμμή και ο πίνακας B είναι πίνακας στήλη και το πλήθος των στοιχείων των δύο πινάκων είναι το ίδιο. Δηλαδή $A \in R^{1\times n}$, και $B \in R^{n\times 1}$ τότε ορίζεται το γίνόμενο των πινάκων $A \cdot B$ και είναι πραγματικός αριθμός

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} \end{aligned}$$

Ειδική περίπτωση ΙΙ. Έστω $A \in R^{m\times n}$ και B πίνακας στήλη τέτοιος ώστε να ορίζεται το γινόμενο κάθε γραμμής του A με τον B (δηλαδή $B \in R^{n\times 1}$). Τότε ο πίνακας $C = A \cdot B$ είναι ένας πίνακας στήλη και κάθε στοιχείο του c_{i1} προκύπτει σαν γινόμενο της i γραμμής του A με τον πίνακα στήλη B.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} + \cdots + a_{3n}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + a_{m3}b_{31} + \cdots + a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Αν $A \in R^{m \times n}$, και $B \in R^{n \times r}$ τότε ορίζεται το γίνόμενο των πινάκων $C = A \cdot B$ έτσι ώστε:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

δηλαδή για να πάρουμε το ij στοιχείο του πίνακα C πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την i γραμμή του πίνακα A με την j στήλη του πίνακα B.

Πίνακες - Πολλαπλασιασμός Πινάκων - Παραδείγματα

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ C &= A \cdot B = 2 \cdot 7 + (-4) \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C &= A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων **δεν** είναι αντιμεταθετικός, αυτό φαίνεται αν δούμε δύο πίνακες $A \in R^{3\times 3}$ και $B \in R^{3\times 2}$ στην περίπτωση αυτή ορίζεται το γινόμενο $B \cdot A$ αλλά ότι και το γινόμενο $A \cdot B$, για το λόγο αυτό στους πίνακες κάνουμε δίακριση πολλαπλασιασμού από δεξιά και από αριστερά.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Για τετραγωνικούς πίνακες ίδιας διάστασης $A, B \in F^{n,n}$ ορίζονται οι $A \cdot B \in F^{n,n}$ και $B \cdot A \in F^{n,n}$.
- Αλλά και πάλι **δεν ισχύει** γενικά $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τους πραγματικούς αριθμούς $AB = 0$ δεν συνεπάγεται ότι $A = 0$ ή $B = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot I_3 = I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Όπως φαίνεται από το παράδειγμα αν πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα με τον μοναδιαίο (από αριστερά ή από δεξιά) τότε ο πίνακας δεν αλλάζει.
- Γενικά για $A \in F^{m,n}$ ισχύει $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.
- Για τετραγωνικούς πίνακες $A \in F^{n,n}$ ισχύει $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$. Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει η αντιμεταθετικότητα.

Ιδιότητες

1. $(A+B)C = AC + BC$
2. $A(B+C) = AB + AC$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $AI = A$
5. $A0 = 0$
6. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

Παράδειγμα 1

Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, να δειχθεί ότι $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Λύση Για $n = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 - 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η $P(n)$, δηλαδή

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η $P(n+1)$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, πραγματικά

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \cdot A &= \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n & 2^n + 3 \cdot (3^n - 2^n) \\ 0 & 3 \cdot 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + 3 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να δειχθεί ότι για τον πίνακα A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ ισχύει } A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 5^n & 2(5^n - 3^n) \\ 3^n - 5^n & -3^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

Λύση Για $n = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 5 & 2(5 - 3) \\ 3 - 5 & -3 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

Για $n + 1$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n+1} - 5^{n+1} & 2(5^{n+1} - 3^{n+1}) \\ 3^{n+1} - 5^{n+1} & -3^{n+1} + 2 \cdot 5^{n+1} \end{pmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, πραγματικά

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 5^n & 2(5^n - 3^n) \\ 3^n - 5^n & -3^n + 2\cdot 5^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha &= (2\cdot 3^n - 5^n) \; - \; 2\cdot 2(5^n - 3^n) \\ \beta &= 4\cdot(2\cdot 3^n - 5^n) \; + \; 7\cdot 2(5^n - 3^n) \\ \gamma &= (3^n - 5^n) \; - \; 2\cdot(-3^n + 2\cdot 5^n) \\ \delta &= 4\cdot(3^n - 5^n) \; + \; 7\cdot(-3^n + 2\cdot 5^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (2\cdot 3^n - 5^n) - 2\cdot 2(5^n - 3^n) \; = \; 2\cdot 3^n - 5^n - 4\cdot 5^n + 4\cdot 3^n \\ &= 6\cdot 3^n - 5\cdot 5^n \; = \; 2\cdot 3^{n+1} - 5^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &= 4(3^n - 5^n) + 7(-3^n + 2\cdot 5^n) \; = \; 4\cdot 3^n - 4\cdot 5^n - 7\cdot 3^n + 14\cdot 5^n \\ &= -3\cdot 3^n \; + \; 10\cdot 5^n \; = \; -3^{n+1} + 2\cdot 5^{n+1} \end{aligned}$$

Πίνακες - Αντίστροφος Πίνακας

Έστω δύο πίνακες $A, B \in F^{n,n}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = BA = I_3$$

Αντίστροφος Πίνακας

Αν για έναν τετραγωνικό πίνακα $A \in R^{n\times n}$ υπάρχει πίνακας $B \in R^{n\times n}$ έτσι ώστε

$$AB = BA = I_n$$

τότε ο πίνακας αυτός είναι μοναδικός και ονομάζεται **αντίστροφος του** A και συμβολίζεται A^{-1}.

Δεν έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο.