Ιδιοτιμές Ιδιοδιανύσματα

Monday, January 11, 2021 11:05 AM

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$(A - \lambda I_n)u = 0 \quad \exists\, \lambda \neq 0$ υπό. $A\underline{u} = \lambda \underline{u}.$

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

λ λέγονται ιδιοτιμές $\underline{u}$ ιδιοδιανύσματα

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο χ.π.

$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \quad \varphi(\lambda) = 0$ είναι

χαρακτηριστική του A.

Παράδειγμα ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \iff$$

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 0\right) - \left(2(1-\lambda) - 0\cdot 1\right) + 6\left(2\cdot 0 - 1(1-\lambda)\right) =$$

$$= -(1+\lambda)(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) - 6(1-\lambda) =$$

$$= -(1+\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) - 2 + 2\lambda - 6 + 6\lambda =$$

$$= -1 + 2\lambda - \lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 2\lambda - 6 + 6\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + (-1+2)\lambda^2 + (2-1+2+6)\lambda - 1 - 2 - 6 =$$

$$= -\lambda^3 + (1)\lambda + (9)\lambda + (-9) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 = -\lambda^2(\lambda-1) + 9(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(-\lambda^2+9) = -(\lambda-1)(\lambda^2-9) = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+3) = 0$$

$(x^2-9) = (x-3)(x+3)$ $\quad$ $(9-x^2) = (3-x)(3+x)$

Άρα οι ιδιοτιμές μας είναι $\lambda = 1$, $\lambda = 3$, $\lambda = -3$

Για $\lambda = -3$

$$A - \lambda I = A - (-3)I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} r_3 \Leftrightarrow r_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2' = r_2 - 2r_1 \\ r_3' = r_3 - 2r_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x + 0y + 4z = 0$

$0x + 4y - 8z = 0$

$z = k \in \mathbb{R}$

$x = -4z = -4k$

$4y = +8z = +8k \Leftrightarrow y = +2k$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} -4k \\ 2k \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$

$$A - \lambda I = A - 1 I =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \ldots$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$-(1+\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = 1$ πολλαπλότητα $= 2$

$\lambda = -1$

$$A - \lambda I = A - 1 I =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$z = k, \; y = \lambda \ldots$

$\lambda = -1 \; \ldots \ldots$

1/ Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών.
$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

2/ Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη μηδενικές.

3/ Ένας πίνακας A και ο ανάστροφος του A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

4/ Ένας πίνακας A και ο αντίστροφος του A^{-1} έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

5/ Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα είναι πάντα πραγματικοί αριθμοί.

6/ Το ίχνος ενός πίνακα είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών του.
$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n$

7/ Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Ισοδύναμοι και όμοιοι πίνακες

Αν $F: U \to V$ γραμμικός μετασχηματισμός και A, B πίνακες που αντιστοιχούν στις βάσεις U κ' V τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q τέτοιοι ώστε

$A = PBQ$

A, B λέγονται ισοδύναμοι

Αν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ κ A, B, P, Q τετραγωνικοί τέξης n με $P = Q^{-1}$

τότε $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος

πίνακας $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A = S^{-1} B S$

χ.π.

- 2 όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο κ ίδιες ιδιοτιμές.

$\det(A - \lambda I) = \dots\dots = \det(B - \lambda I)$

- Αν u ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε Su είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή.

$Au = \lambda u \Leftrightarrow B(Su) = \lambda(Su)$

- Έστω $A \in F^{n \times n}$ και $\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ τότε $a_0 = (-1)^n \det A$, $a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$, $a_n = 1$

- Θ. Cayley - Hamilton

Κάθε τετραγωνικός πίνακας μηδενίζει το χ.π., $\varphi(A) = 0$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$

- Οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

- Αν $A \in F^{n \times n}$ αντιστρέψιμος τότε λ είναι ιδιοτιμή του A αν-ν ο $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.

Άσκηση Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A
- Με τη βοήθεια του Θ. Cayley-Hamilton να βρεθούν A^{-1}, A^4, A^5

$$\varphi(\lambda)=0 \Leftrightarrow |A-\lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-2\right) - \left(1\cdot(1-\lambda) - 1\cdot 0\right) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-2\right) - (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-2-1\right) = (1-\lambda)\left(\cancel{1}-2\lambda+\lambda^2-2-\cancel{1}\right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-2) = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 4+8 = 12$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{3}}{2} = 1\pm\sqrt{3}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1-\sqrt{3},\ \lambda_3 = 1+\sqrt{3}$$

$$\varphi(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-2) = \lambda^2 - \cancel{2\lambda} - 2 - \lambda^3 + 2\lambda^2 + \cancel{2\lambda}$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2 = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2) = 0$$

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2$$

$$A^3 - 3A^2 + 2I_3 = 0$$

$$A^{-1}\cdot A^3 - 3A^{-1}A^2 + 2\cdot A^{-1}I_3 = A^2 - 3A + 2A^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$A^{-1}\cdot A^{3} - 3A^{-1}A^{2} + 2\cdot A^{-1}I_3 = A^{2} - 3A + 2A^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$2A^{-1} = -A^{2} + 3A \Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}\left(A^{2} - 3A\right)$$

Απο την σχέση $A^3 - 3A^2 + 2I_3 = 0 \Leftrightarrow$

$$A^3 = 3A^2 - 2I_3$$

$$A^4 = A^3 A = (3A^2 - 2I_3)A = 3A^3 - 2A =$$

$$= 3(3A^2 - 2I_3) - 2A = 9A^2 - 6I_3 - 2A =$$

$$= 9A^2 - 2A - 6I_3$$

$$A^5 = A^4\cdot A = (9A^2 - 2A - 6I_3)\cdot A = 9A^3 - 2A^2 - 6A =$$

$$= 9(3A^2 - 2I_3) - 2A^2 - 6A = 27A^2 - 18I_3 - 2A^2 - 6A =$$

$$= 25A^2 - 6A - 18I_3$$

Παράδειγμα άσκηση

Να γράψετε τον $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ με στοιχεία

$a_{ij} = i + j \quad i \neq j$

$a_{ij} = 0 \quad i = j$

3×4

$$\begin{bmatrix} \underset{1,1}{0} & \underset{1,2}{3} & \underset{1,3}{4} & \underset{1,4}{5} \\ \underset{2,1}{3} & \underset{2,2}{0} & \underset{2,3}{5} & \underset{2,4}{6} \\ \underset{3,1}{4} & \underset{3,2}{5} & \underset{3,3}{0} & \underset{3,4}{7} \end{bmatrix}$$

$A = [\quad]$, $B = [\quad]$, $C = [\quad]$

$A \cdot B = ;$ $\quad BA = ;$ $\quad B \cdot A = \ldots\ldots$

$A + B + C$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & a & 10 & x \\ 4 & b & 8 & y \\ 3 & c & 6 & z \\ 2 & d & 4 & w \end{pmatrix}$$

$\det(B) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$A^{-1} =$