Ορισμός γραμμικού διαν. χώρου.

F σώμα, V μη κενό σύνολο (F, V) διαν. χώρος

α) Πράξη + (πρόσθεση) $(V, +)$

1/ $a+(b+c)=(a+b)+c \quad a,b,c\in V$

2/ $\exists\, 0\in V : a+0=0+a=a \quad \forall a\in V$

3/ $\forall a\in V \ \exists\, -a\in V : a+(-a)=0$

4/ $a+b=b+a \quad , a,b\in V$

β) Εξωτερική πράξη $\cdot$ (αριθμητικός πολλαπλασιασμός) ή $\times$

Απεικόνιση $: F\times V \to V \quad (\lambda, a)\to \lambda a$

1/ $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b \quad \lambda\in F,\ a,b\in V$

2/ $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a \quad \lambda,\mu\in F,\ a\in V$

3/ $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a) \quad \lambda,\mu\in F,\ a\in V$

4/ $1\cdot a=a \quad a\in V$

Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

$F \quad \mathbb{R} \qquad V \quad \mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$

$x_i\in\mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ διατεταγμένες n-άδες
$i=1,2,\dots,n$

$\underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^n$ **Πρόσθεση** $\quad \underline{x}=\bar{x} \quad \underline{y}=\bar{y}$

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \bar{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \qquad \bar{x}+\bar{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1\\ x_2+y_2\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}$$

Αρ. Πολλαπλασιασμός

$$\lambda\underline{x}=\lambda\bar{x}=\lambda\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_1\\ \lambda x_2\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}$$

Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τις πράξεις (πρόσθεση 1-4), (αρ. πολλαπλασιασμός 1-4) αποτελεί διανυσματικό χώρο

Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τις πράξεις (πρόσθεση 1-4), (βαθμ. πολλαπλασιασμού 1-4) αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Εσωτερικό γινόμενο

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \qquad \bar{x}^T \cdot \bar{y}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \bar{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\bar{x}^T \cdot \bar{y} = \underset{1\times n}{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)} \cdot \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots + x_ny_n \quad \leftarrow \quad 1\times 1$$

norm

$$\|\bar{x}\| = \bar{x}^T \bar{x} =$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2$$

Διανυσματικοί Υπόχωροι

Διαν. υπόχω. $W < V$ διαν. χω.

1/ αν $u, v \in W \quad u+v \in W$

2/ αν $u \in W \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda u \in W$

Παράδειγμα

$W = \{(x_1, x_2, 0) \quad , x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ν.δ.ο διαν. υποχ. του $\mathbb{R}^3$

1/ Έστω ότι $\bar{u} \in W \quad \bar{u} = (u_1, u_2, 0)$

$\bar{v} \in W \quad \bar{v} = (v_1, u_2, 0)$

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1, u_2, 0) + (v_1, v_2, 0) =$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0) \in W$$

$= (u_1+v_1, u_2+v_2, 0) \in W$

2/ $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{u} \in W \quad \bar{u} = (u_1, u_2, 0)$

$\lambda \cdot \bar{u} = \lambda \cdot (u_1, u_2, 0) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda \cdot 0) =$

$= (\lambda u_1, \lambda u_2, 0) \in W$

Παράδειγμα

$W = \{ (x_1, x_2, 1), \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$ διαν. υποχ. του $\mathbb{R}^3$

1/ $\bar{u}, \bar{v} \in W \quad \bar{u} = (u_1, u_2, 1), \ \bar{v} = (v_1, v_2, 1)$

$\bar{u} + \bar{v} = (u_1, u_2, 1) + (v_1, v_2, 1) = (u_1+v_1, u_2+v_2, 1+1) =$

$= (u_1+v_1, u_2+v_2, 2) \notin W$

άρα W δεν είναι διαν. υποχώρος του $\mathbb{R}^3$

2/ $\bar{u} \in W \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot \bar{u} = \lambda (u_1, u_2, 1) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda) \notin W$

Παράδειγμα Ν.δ.ο

$W = \{ (x_1, x_2, x_3), \ x_1 + x_2 = 0 \}$ ως υποχώρος

διαν. υποχ. του $\mathbb{R}^3$.

1/ $\bar{u} \in W \quad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad u_1 + u_2 = 0$

$\bar{v} \in W \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \qquad v_1 + v_2 = 0$

$\bar{u} + \bar{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) =$

$= (\underbrace{u_1 + v_1}_{y_1}, \underbrace{u_2 + v_2}_{y_2}, \underbrace{u_3 + v_3}_{y_3})$

$y_1 + y_2 = 0;$

$y_1 + y_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 =$

$= (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = 0 + 0 = 0 \in W$

2/ $\bar{u} \in W \quad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad u_1 + u_2 = 0$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot \bar{u} \in W$;

$\lambda \cdot \bar{u} = \lambda(u_1, u_2, u_3) = (\underbrace{\lambda u_1}_{y_1}, \underbrace{\lambda u_2}_{y_2}, \underbrace{\lambda u_3}_{y_3})$

$y_1 + y_2 = 0$;

$y_1 + y_2 = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2) = \lambda \cdot 0 = 0 \in W$

Άρα. W δ.αν. υποχ. $\mathbb{R}^3$.

V δ.αν.χώρος και $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots \bar{u}_n\}$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$.

$\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_n \bar{u}_n \in V$

V'' $\langle S \rangle$ υποχ. του παραγόμενου του S.

ο παραγόμενος υποχώρος του S.

$u+v$

λu

$\lambda u + \mu v$

'Ασκηση

$V = \{ (0, \alpha, 0)^T, \alpha \in \mathbb{R} \}$ να βρούμε αν είναι υποχ. του $\mathbb{R}^3$

1/ $u \in V$, $v \in V$, $\bar{u}^T = (0, u_2, 0)^T$

$\bar{v}^T = (0, v_2, 0)^T$

$\bar{u} + \bar{v}^T = (0, u_2, 0)^T + (0, v_2, 0)^T = (0, u_2 + v_2, 0)^T \in V$

2/ $u \in V$ $\bar{u}^T = (0, u_2, 0)^T$ $\lambda \in \mathbb{R}$

2/ $u \in V$ $\quad \bar{u}^T = (0, u_2, 0)^T \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot \bar{u}^T = \lambda (0, u_2, 0)^T = (0 \cdot \lambda, \lambda u_2, 0 \cdot \lambda)^T =$$
$$= (0, \lambda u_2, 0)^T \in V$$

V υποχ. του $\mathbb{R}^3$

Άσκηση

$V = \{ (a, 1, 0)^T, \ a \in \mathbb{R} \} \quad V \subset \mathbb{R}^3$;

$u \in V, v \in V, \ \bar{u} = (u_1, 1, 0)^T, \ \bar{v} = (v_1, 1, 0)^T$

1/ πρόσθεση

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1, 1, 0)^T + (v_1, 1, 0)^T = *$$
$$= (u_1 + v_1, 2, 0) \notin V$$

2/ πολ/σμός αντίστοιχα

$$* = \begin{pmatrix} u_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ 1+1 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (\underbrace{u_1 + v_1}_{y_1}, 2, 0)^T$$

$= (y_1, \underbrace{2}_{y_2}, \underbrace{0}_{y_3})^T$ δεν είναι της μορφής

$= (a, 1, 0)$. Θα έπρεπε το $y_2 = 1$

Άσκηση

$V = \{ (a, b, c)^T, \ a + b = c \}$ υποχ. του $\mathbb{R}^3$;

$\bar{u}, \bar{v} \in V \quad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \quad v = (v_1, v_2, v_3)^T$

1/ πρόσθεση

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)^T = (z_1, z_2, z_3)^T$$

$$z_1 + z_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) =$$

γνωρίζω ότι $a + b = c$

για το $\bar{u}$ $\quad u_1 + u_2 = u_3$

γνωρίζω ότι $a+b=c$

άρα για το $\bar{u}$ $u_1+u_2=u_3$

$\bar{v}$ $v_1+v_2=v_3$

$=u_3+v_3=z_3$

άρα ισχύει ότι $z_1+z_2=z_3$ άρα $\in V$

2/πολ/σμό

$\bar{u}=(u_1, u_2, u_3)^T \in V$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot \bar{u} = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)^T = (\underbrace{\lambda u_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda u_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda u_3}_{z_3})^T$

θέλω ν.δ.ο $z_1+z_2=z_3$

$\lambda u_1+\lambda u_2=\lambda(u_1+u_2)=\lambda u_3=z_3$ άρα $\in V$

Άρα ο V υποχ. του $\mathbb{R}^3$

Άσκηση

$V=\{(a,b,c)^T, a+b+c=1\}$, $\mathbb{R}^3$;

$\bar{u}, \bar{v} \in V$ $\bar{u}=(u_1, u_2, u_3)^T$, $u_1+u_2+u_3=1$

$\bar{v}=(v_1, v_2, v_3)^T$, $v_1+v_2+v_3=1$

1/πρόσθεση

$\bar{u}+\bar{v}=(u_1, u_2, u_3)^T+(v_1, v_2, v_3)^T=$

$=(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)^T=(z_1, z_2, z_3)^T$

θα πρέπει ν.δ.ο $z_1+z_2+z_3=1$

$z_1+z_2+z_3=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)=$

$=(u_1+u_2+u_3)+(v_1+v_2+v_3)=$

$=1+1=2 \neq 1$ άρα $\notin V$

2/πολ/σμό

$\lambda u=\lambda(u_1, u_2, u_3)^T=(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)^T$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda u_1+\lambda u_2+\lambda u_3=\lambda(u_1+u_2+u_3)=\lambda \cdot 1=\lambda \neq 1 \notin V$

άρα δεν είναι υποχ του $\mathbb{R}^3$

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 = \lambda(u_1+u_2+u_3) = \lambda \cdot 1 \ldots$$

άρα δεν είναι υποχ. του $\mathbb{R}^3$

Άσκηση

$$V = \{ (a, 0, b)^T,\ a+b=0 \}$$

$\bar{u} = (u_1, 0, u_3)^T \in V \qquad u_1 + u_3 = 0$

$\bar{v} = (v_1, 0, v_3)^T \in V \qquad v_1 + v_3 = 0$

1/πρόσθεση

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1, 0, u_3)^T + (v_1, 0, v_3)^T =$$
$$= (u_1+v_1,\ 0,\ u_3+v_3)^T = (z_1, 0, z_3)^T$$

$z_1 + z_3 = 0$;

$$z_1 + z_3 = (u_1+v_1) + (u_3+v_3) = (u_1+u_3) + (v_1+v_3) =$$
$$= 0 + 0 = 0 \in V$$

$$\lambda \cdot \bar{u} = \lambda(u_1, 0, u_3)^T = (\lambda u_1, 0, \lambda u_3)^T$$

$$\lambda u_1 + \lambda u_3 = \lambda(u_1+u_3) = \lambda \cdot 0 = 0 \in V$$

άρα V υποχ. του $\mathbb{R}^3$

Άσκηση

$V = \{ (0, a)^T,\ a \in \mathbb{R} \}$ υποχ. $\mathbb{R}^2$;

$\bar{u} \in V \quad \bar{u} = (0, u_2)^T$

$\bar{v} = V \quad \bar{v} = (0, v_2)^T$

1/πρόσθεση

$$\bar{u} + \bar{v} = (0, u_2)^T + (0, v_2)^T = (0+0,\ u_2+v_2)^T =$$
$$= (0, u_2+v_2)^T = (0, z_2)^T \in V$$

2/ πολ/σμό

$$\lambda \cdot \bar{u} = \lambda \cdot (0, u_2)^T = (\lambda \cdot 0, \lambda u_2)^T = (0, \lambda u_2)^T = (0, z_2)^T \in V$$

άρα V υποχ. του $\mathbb{R}^2$

άρα V υποχ. του R

Άσκηση

$V = \{ (a,1)^T \quad a \in R \}$ υποχ. R^2;

$\bar{u}, \bar{v} \in V \quad \bar{u} = (u_1, 1)^T$

$\bar{v} = (v_1, 1)^T$

1/ πρόσθεση

$\bar{u} + \bar{v} = (u_1, 1)^T + (v_1, 1)^T = (u_1 + v_1, 2)^T \notin V$

$\lambda \bar{u} = \lambda (u_1, 1)^T = (\lambda u_1, \lambda \cdot 1)^T = (\lambda u_1, \lambda) \notin V$

V δεν είναι υποχ του R^2

Άσκηση

$V = \{ (a,b)^T, \ a + b = 0 \}$

$\bar{u} = (u_1, u_2)^T \quad u_1 + u_2 = 0 \qquad \bar{u}, \bar{v} \in V$

$\bar{v} = (v_1, v_2)^T \quad v_1 + v_2 = 0$

1/ πρόσθεση

$\bar{u} + \bar{v} = (u_1, u_2)^T + (v_1, v_2)^T =$

$= (\underbrace{u_1 + v_1}_{z_1}, \underbrace{u_2 + v_2}_{z_2})^T$

$z_1 + z_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)$

$= 0 + 0 = 0 \quad \in V$

2/ πολ/σμός

$\lambda u = \lambda (u_1, u_2)^T = (\lambda u_1, \lambda u_2)^T$

$\lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda (u_1 + u_2) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \in V$

Άρα V υποχ του R^2

Άσκηση

$V = \{ (a,b)^T, \ 2a - 3b = 0 \} \qquad R^2$;

$V = \{ (a,b)^T \ , 2a - 3b = 0 \}$ $\quad \mathbb{R}$;

$\bar{u}, \bar{v} \in V \quad \bar{u} = (u_1, u_2)^T \quad 2u_1 - 3u_2 = 0$

$\bar{v} = (v_1, v_2)^T \quad 2v_1 - 3v_2 = 0$

1/πρόσθεση

$\bar{u} + \bar{v} = (u_1, u_2)^T + (v_1, v_2)^T = (\underbrace{u_1 + v_1}_{z_1}, \underbrace{u_2 + v_2}_{z_2})^T$

Θα πρέπει ν.δ.ο $\quad 2z_1 - 3z_2 = 0$

$2z_1 - 3z_2 = 2(u_1 + v_1) - 3(u_2 + v_2) =$

$= 2u_1 + 2v_1 - 3u_2 - 3v_2 =$

$= (2u_1 - 3u_2) + (2v_1 - 3v_2) = 0 + 0 = 0 \in V$

2/πολ/σμός $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot \bar{u} = \lambda \cdot (u_1, u_2)^T = (\underbrace{\lambda u_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda u_2}_{z_2})^T$

$2z_1 - 3z_2 = 0$

$2 \cdot (\lambda u_1) - 3 \cdot (\lambda u_2) = \lambda (2u_1) - \lambda (3u_2) =$

$= \lambda (2u_1 - 3u_2) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \in V$

άρα ο V υποχ. του $\mathbb{R}^2$

Άσκηση

$W = \{ (x_1, x_2, x_3) \ , \ x_1 + x_2 = 0 \}$ υποχ. $\mathbb{R}^3$;

$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \in W$

$u_1 + u_2 = 0 \qquad (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$

$v_1 + v_2 = 0$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda \bar{u} + \mu \bar{v} = 0$ ν.δ.ο.

$\lambda \bar{u} + \mu \bar{v} = \lambda (u_1, u_2) + \mu (v_1, v_2) =$

$$\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}=\lambda(u_1,u_2)+\mu(v_1,v_2)=$$
$$(\lambda u_1,\lambda u_2)+(\mu v_1,\mu v_2)=(\underbrace{\lambda u_1+\mu v_1}_{z_1},\underbrace{\lambda u_2+\mu v_2}_{z_2})$$

$$z_1+z_2=(\lambda u_1+\mu v_1)+(\lambda u_2+\mu v_2)=$$
$$=(\lambda u_1+\lambda u_2)+(\mu v_1+\mu v_2)=$$
$$=\lambda(u_1+u_2)+\mu(v_1+v_2)=$$
$$=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0$$

Γραμμική εξάρτηση - ανεξαρτησία.

V διαν. χώρος κ' $S=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\dots\bar{u}_n\}$ σύνολο διαν. του V.

Γραμ. εξαρτ. το S αν $\exists\ \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ όχι όλοι ίσοι με 0 (μηδέν)

$$\lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2+\dots+\lambda_n\bar{u}_n=0$$

Γραμ. ανεξ.
$$\lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2+\dots+\lambda_n\bar{u}_n=0$$
$$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$$

Παράδειγμα
$\bar{u}_1=(1,2,3)$, $\bar{u}_2=(-1,0,1)$, $\bar{u}_3=(0,2,4)$
$$\lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2+\lambda_3\bar{u}_3=0$$
$$\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(-1,0,1)+\lambda_3(0,2,4)=0$$
$$(\lambda_1,2\lambda_1,3\lambda_1)+(-\lambda_2,0,\lambda_2)+(0,2\lambda_3,4\lambda_3)=0$$
$$(\lambda_1-\lambda_2,\ 2\lambda_1+2\lambda_3,\ 3\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3)=(0,0,0)$$

$\lambda_1=\lambda_2$ αν. $\lambda_1=1=\lambda_2$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 \\ \lambda_1 &= -\lambda_3 \end{aligned} \qquad \text{π.χ. } \lambda_1 = 1 = \lambda_2, \quad \lambda_3 = -1$$

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \lambda_3 \bar{u}_3 = 0 \Rightarrow$$
$$\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \bar{u}_3 = 0 \Leftrightarrow \bar{u}_3 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2\left((-1)\cdot 4 + 0\cdot 1\right) - 2\left(1\cdot 1 - (-1)\cdot 3\right) =$$
$$= -2(-4+0) - 2(1+3) = 8 - 8 = 0 \text{ γραμ. εξαρτ.}$$

Αν η ορίζουσα των διαν. $= 0 \Rightarrow$ τα διαν. είναι γραμμικά εξαρτημένα

Αν η ορίζουσα $\neq 0$ γραμ. ανεξάρτητα

$$// \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{22}\cdot(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} //$$

Βάση και διάσταση ενός χώρου W.

$W = \{(x_1, x_2, 0),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$e_1 = (1,0,0) \qquad e_2 = (0,1,0)$

$\bar{u} = (u_1, u_2, 0) = u_1\cdot e_1 + u_2\cdot e_2$

Άρα ότι e_1, e_2 είναι βάση του W

κ' τα παράγουν.

Γενικά ο W έχει άπειρες βάσεις

Βάση ονομάζεται το ελάχιστο σύνολο των διανυσμάτων που παράγουν τον W (ή του οποιουδήποτε χώρου)

$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$

$\bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^T$

$\vdots$

$\bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^T$

Τα $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ παράγουν τον χώρο R^n

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0)^T + x_2(0, 1, \ldots, 0)^T + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)^T = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \ldots + x_n \bar{e}_n$$

Τα $\bar{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι η φυσική βάση του R^n

Αν έχω $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in R^n$

1/ Τα $\bar{v}_1, v_2, \ldots, \bar{v}_m$ γρ. ανεξάρτητα αν $m \leq n$

2/ Τα $\bar{v}_1, v_2, \ldots, \bar{v}_m$ παράγουν τον R^n αν $m \geq n$

3/ Τα $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$ είναι βάση του R^n αν $m = n$

Άσκηση $\bar{u}_1 = (1, 1, 0)^T$, $\bar{u}_2 = (1, 0, 1)^T$, $\bar{u}_3 = (0, 1, 1)^T$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1 \cdot 1 - \cancel{1 \cdot 0}^{\,0}) - 1(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

[illegible] γραμ. ανεξάρτητα κ' βάση του R^3

$= -(\ldots)$

τα διαν. γραμ. ανεξάρτητα κ' βάση του R^3

Άσκηση

$\{(1,2,-1)^T, (1,0,1)^T, (2,2,0)^T\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$2 \quad -2 \quad -4$

$$= -(2\cdot 0 - (-1)\cdot 2) - (1\cdot 2 - 2\cdot 2) =$$

$$= -2 + 2 = 0$$ γραμ. εξαρτ.

Άσκηση $\{(1,1,0)^T, (1,2,1)^T, (3,0,1)^T\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

-2

$$= (2\cdot 1 - 1\cdot 0) - (1\cdot 1 - 3\cdot 1) =$$

$$= 2 + 2 = 4 \neq 0$$ γραμμικά ανεξάρτητα

Άσκηση

x, y, z γραμμικά ανεξάρτητα

ν.δ.ο $(2x+2y,\ 2y+2z,\ 2x+2z)$ είναι γραμ. ανεξ.

Εφόσον x, y, z γρ. ανεξ.

$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$ όπου $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$a(2x+2y) + b(2y+2z) + c(2x+2z) = 0$$

$$2ax + 2ay + 2by + 2bz + 2cx + 2cz = 0$$

$$\underbrace{(2a+2c)}_{\lambda_1}x + \underbrace{(2a+2b)}_{\lambda_2}y + \underbrace{(2b+2c)}_{\lambda_3}z = 0$$

$\lambda_1 \qquad \lambda_2 \qquad \lambda_3$

$$\left.\begin{array}{l} 2a+2c=0 \\ 2a+2b=0 \\ 2b+2c=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a=-c \\ a=-b \\ b=-c. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2a=-(c+b) \\ \quad =-(c-c) \\ \quad =0 \Rightarrow a=0 \end{array}$$

τότε $b=0$ κ' $c=0$

άρα $(2x+2y)$, $(2y+2z)$, $(2x+2z)$ γρ. ανεξάρτ.

Τάξη Πίνακα

Έναν πίνακας $m\times n$ έχει συγκεκριμένο αρ. γραμ. ή στηλών. και παράγουν τον χώρο των γραμ. κ' στηλών.

Οι 2 χώροι έχουν την ίδια διάσταση

Η κοινή διάσταση λέγεται τάξη ενός πίνακα

$r(A)$ ή $\mathrm{rank}(A)$

$r(A) \leq \min\{m,n\}$

A, B πίνακες

λέγονται ισοδύναμοι $\left(A \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} B\right)$

γραμμοπράξεις

1/ Αλλαγή 2 γραμμών

2/ Πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό $\neq 0$

3/ Πρόσθεση μιας γραμμής σε μια άλλη.

Η τάξη των 2 ισοδύναμων παραμένει σταθερή (είναι ίδια)

Την τάξη ενός πίνακα μπορούμε να βρούμε με την ορίζουσα του.

Η τάξη είναι ίση με πρώτη $\neq 0$ αρχική ορίζουσα ή την πρώτη$\neq 0$ υποορίζουσα.

Δηλαδή αν έχω πίνακα $n\times k$ διαστάσεων

αν $\det(A)\neq 0$ τότε $r(A)=k$

... υποορίζουσα $\neq 0$.

Δηλαδή αν έχω πίνακα ...

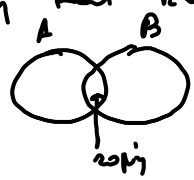
αν $\det(A) \neq 0$ τότε $r(A) = k$

αν $\det(A) = 0$ τότε ψάχνω υποορίζουσα $\neq 0$.

$r(A) = k-1$ αν $\exists$ μια υποορίζουσα $\neq 0$

- Έστω V είναι δ.χ (διανυσματικός χώρος) που παράγεται από n στοιχεία τότε κάθε γραμ. ανεξάρτητο υποσύνολο του έχει το πολύ n στοιχεία.
- Κάθε γραμ. ανεξάρτητο υποσύνολο F^n έχει το πολύ n γραμ. ανεξάρτητα στοιχεία.
- Αν S είναι γραμ. ανεξάρτητο υποσύνολο του V τότε υπάρχει βάση του V που περιέχει το S.
- Έστω V δ.χ και S μια βάση του τότε κάθε στοιχείο του V γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.
- Έστω V δ.χ με $\dim V = n$ ($\dim$ = διάσταση).
  Αν ένα σύνολο $\{v_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$ με n στοιχεία παράγει τον V τότε αυτό αποτελεί βάση του.
- Έστω V δ.χ με $\dim V = n$.
  Αν ένα σύνολο $\{v_1, v_2, v_3 \dots, v_n\}$ με n στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτό αποτελεί βάση του.
- Έστω V δ.χ. με $\dim V = n$ και U είναι υπόχωρος του V.
  Τότε $\dim U \leq \dim V$. Αν $\dim U = n$ τότε $U = V$.

Τομή και Ένωση υποχώρων



ένωση είναι όλο

Έστω U κ W διαν. υπόχωροι του δ.χ V
- η τομή $U \cap W$ είναι υπόχωρος του V
- η τομή $U \cap W$ είναι υπόχωρος του W
- η τομή $U \cap W$ είναι υπόχωρος του U

$\cap \rightarrow$ τομή $\cup \rightarrow$ ένωση

Η ένωση 2 υπόχωρων δεν είναι πάντα διαν. υπόχωρος.

ι) → ισχύει ...

Η ένωση 2 υπόχωρων δεν είναι πάντα διαν. υπόχωρος.

Άθροισμα κ' ευθύ άθροισμα υπόχωρων.

Άθροισμα 2 υπόχωρων

$$U+W=\{u+w \mid u\in U, w\in W\}$$

και είναι διαν. υπόχωρος του V ενώ κάθε ένας από τους U, W είναι υπόχωρος του $U+W$.

Ευθύ Άθροισμα 2 υπόχωρων
Αν $U\cap W=\{0\}$ κ' γράφεται $U\oplus W$.

Άσκηση
Να ελέγξετε αν το σύνολο διανυσμάτων $\{(1,0)^T,(0,1)^T\}$ είναι βάση του R^2

$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot 0=1\neq 0$ άρα παράγουν, τα 2 διανύσματα, τον R^2 κ' άρα βάση του R^2

Άσκηση για τον R^2

$\{(1,1)^T,(0,1)^T\}$

$\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot 1=1\neq 0$ άρα βάση κ' παράγ. του R^2

Άσκηση για τον R^2

$\{(1,2)^T,(2,4)^T\}$

$\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 2=0$. Τα διανύσματα είναι γ. εξαρ.
Δεν είναι βάση του R^2

Άσκηση για τον R^2

$\{(1,0)^T,(0,1)^T,(1,1)^T\}$ Τα διανύσματα
$(1,1)=1\cdot(1,0)+1(0,1)$
άρα γ. εξαρ.

μπορώ να πάρω σε δυάδες

$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$ γ. ανεξ. $\Rightarrow$ βάση του R^2

$\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$ γ. ανεξ. $\Rightarrow$ βάση του R^2

... βάση του R^2

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ γρ. ανεξ. $\Rightarrow$ βάση του $\mathbb{R}^2$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ γρ. ανεξ. $\Rightarrow$ βάση του $\mathbb{R}^2$

Άσκηση: να εξεταστεί αν τα επόμενα σύνολα διανυσμάτων αποτελούν βάσεις του $\mathbb{R}^3$

α) $\{(1,0,1)^T, (0,1,1)^T\}$

Για να αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ θα έπρεπε να είναι τουλάχιστον 3 διανύσματα

β) $\{(1,1,0)^T, (0,1,0)^T, (0,1,1)^T\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot 1 - 0\cdot 1) = 1 \neq 0$$ $\Rightarrow$ γρ. ανεξάρτητα

άρα παράγουν το $\mathbb{R}^3$ και είναι βάση.

γ) $\{(1,2,0)^T, (1,2,4)^T, (-1,-2,-4)^T\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ άρα γρ. εξ. δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

δ) $\{\underbrace{(1,0,0)^T}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)^T}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)^T}_{e_3}, \underbrace{(1,2,0)^T}_{\alpha}\}$

a, e_1, e_2, e_3 γρ. εξαρ.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ γρ. εξ. $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ γρ. ανεξ.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ γρ. ανεξ. $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ γρ. ανεξ.

Επειδή $\exists$ μια τριάδα διαν. γρ. εξαρτ. $\Rightarrow$ δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

Άσκηση για χώρους όπου έχουμε υποχ. να βρούμε τις βάσεις

Άσκηση για χώρους όπου ήταν υποχ. να βρούμε τις βάσεις τους αν γ. και διαστάσεις

$\{V = \{(0,a,0)^T, a\in\mathbb{R}\}$ είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

Η τάξη του $r(V) = 1 \Rightarrow (0,1,0)$ ή $(0,a,0)$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^1$

$a_1 = (0,1,0)$
$a_2 = (0,2,0)$
$a_3 = (0,3,0)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\{V = \{(a,b,c)^T, \underline{a+b=c}\}$ είναι διαν. υποχ. του $\mathbb{R}^3$

$a_1 = (1,0,1)$ $\quad 1+0=1$ ισχύει
$a_2 = (0,1,1)$ $\quad$ -//-
$a_3 = (1,1,2)$ $\quad$ -//-

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot 2 - 1\cdot 1) + (0\cdot 1 - 1\cdot 1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{γρ. εξαρτ.}$$

άρα δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

Όλοι οι υποορίζουσες $2\times 2 \neq 0$ άρα βάση του $\mathbb{R}^2$.

$V = \{(a,0,b)^T, \underline{a+b=0}\}$ $\quad a,b\in\mathbb{R}$ διαν. υποχ. $\mathbb{R}^3$

$a_1 = (1,0,-1)$
$a_2 = (-1,0,1)$
$a_3 = (2,0,-2)$

$$\begin{pmatrix} 1+(-1)=0 \\ -1+1=0 \\ 2+(-2)=0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{γρ. εξαρ.} \Rightarrow \text{δεν είναι βάση του } \mathbb{R}^3$$

Οι υποορίζουσες $2\times 2 = 0$ άρα η $rank = 1$ βάση του $\mathbb{R}^1$

$\{(\ldots)^T, \ldots\}$ ... $\mathbb{R}^2$

Οι υποσ[illegible]

$V = \{(0,a)^T, a \in \mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

$a_1 = (0,1)$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ άρα rank $=1$ κ' βάση του $\mathbb{R}^1$

$a_2 = (0,3)$

$V = \{(a,b)^T, a+b=0\}$ υποχ. του $\mathbb{R}^2$

$a_1 = (1,-1)^T$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - (-1)(-1) = 0$ άρα γ.εξ.

$a_2 = (-1,1)^T$ άρα η βάση $\mathbb{R}^1$

$V = \{(a,b)^T, \underline{2a-3b=0}\}$ υποχ. του $\mathbb{R}^2$

$a_1 = (3,2)$ $\quad 2\cdot 3 - 3\cdot 2 = 0$

$a_2 = (6,4)$ $\quad 2\cdot 6 - 3\cdot 4 = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ γρ. εξαρ. είναι βάση του $\mathbb{R}^1$

Άσκηση. Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

οδηγό στοιχείο

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4' = r_4 - 4r_1]{r_2' = r_2 - 2r_1,\ r_3' = r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & -4 & -14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & -14 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4'' = r_4' + 2r_2]{r_3'' = r_3' + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & -28 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -28 & -7 \\ 0 & 0 & -20 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3''' = \frac{r_3''}{-7}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -20 & -9 \end{pmatrix} r_4^{IV} = r_4''' + 5 \cdot r_3'''$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{rank} = 4 = \min(4,4)$$

Παράδειγμα rank = ;

οδηγό στοιχείο

a_{22} οδηγό στοιχείο

$$\begin{array}{c} a_{11} \rightarrow \\ \\ a_{31} \rightarrow \\ a_{41} \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_3' = r_3 - r_1 \\ r_4' = r_4 - r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_3'' = r_3' - r_2' \\ r_4'' = r_4' + r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα η τάξη του πίνακα είναι rank $= \min\{2,3\} = 2$

Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2' = r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

rank $= 2$

Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2' = r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank $= 1 = \min\{1, 2\}$

Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2' = r_2 - 2r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = \min\{2, 2\} = 2$$

Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} r_2' = r_2 + 2r_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = \min\{2, 3\} = 2$$

Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} r_2' = r_2 - 2r_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} r_3'' = r_3' - r_2' \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = \min\{2, 3\} = 2$$

Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2' = r_2 - 2r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = \min\{3, 3\} = 3$$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί - Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός Γραμ. Απεικόνισης.

Ορισμος Γραμ. Απεικονισης.

Αν ειτω 2 διαν. χώρους U κ' V πάνω στο ίδιο σωμα F.
Τότε μια απεικόνιση $F: U \to V$ καλείται γραμμική απεικόνιση αν για καθε $u, v \in U$ και $\lambda \in F$ ισχύουν

1/ $F(u+v) = F(u) + F(v)$

2/ $F(\lambda u) = \lambda F(u)$

ή ισοδύναμα

$F: U \to V \qquad u, v \in U \quad , \lambda, \mu \in F$

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v)$$

Παράδειγμα

Δίνεται η απεικ. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$F(x, y, z) = x + y + 2z$$

Ν.δ.ο. είναι γραμμική.

$u_1 = (x_1, y_1, z_1) \qquad u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

Θέλουμε ν.δ.ο $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$

$$F(u_1 + u_2) = F((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) =$$

$$= F((\underbrace{x_1 + x_2}_{(x)}, \underbrace{y_1 + y_2}_{(y)}, \underbrace{z_1 + z_2}_{(z)})) = \qquad F(x, y, z) = x + y + 2z$$

$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) =$$

$$= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + 2z_1 + 2z_2 =$$

$= (x_1 + y_1 + 2z_1) + (x_2 + y_2 + 2z_2) =$

$= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) =$

$= f(u_1) + f(u_2)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1)$

$f(\lambda u_1) = f(\lambda(x_1, y_1, z_1)) =$

$= f((\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)) =$ $\quad f(x,y,z) = x + y + 2z$

$= f(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) =$

$= \lambda x_1 + \lambda y_1 \; \lambda \cdot 2z_1$

$= \lambda(x_1 + y_1 + 2z_1)$

$= \lambda f(x_1, y_1, z_1)$

$= \lambda f(u_1)$

ή $\quad u_1 = (x_1, y_1, z_1) \;, u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$f(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2)$

$f(\lambda u_1 + \mu u_2) = f(\lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) =$

$= f((\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) + (\mu x_2, \mu y_2, \mu z_2)) =$

$= f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) =$

$= (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) + 2(\lambda z_1 + \mu z_2) =$

$= \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 + 2\lambda z_1 + 2\mu z_2 =$

$= \lambda(x_1 + y_1 + 2z_1) + \mu(x_2 + y_2 + 2z_2) =$

$= \lambda(x_1 + y_1 + 2z_1) + \mu(x_2 + y_2 + 2z_2) =$

$= \lambda F(x_1, y_1, z_1) + \mu F(x_2, y_2, z_2) =$

$= \lambda F(u_1) + \mu F(u_2)$

Παράδειγμα Ν.δ.ο για τις απεικονίσεις

1/ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $F(x,y) = (2x+y, x-y+2)$

2/ $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $F(x,y,z) = (x+y+z, xy)$

δεν είναι γραμμικές.

1/ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $F(x,y) = (2x+y, x-y+2)$

Έστω $u_1 = (x_1, y_1)$ $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Θέλουμε ν.δ.ο αν ισχύει $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$

$F(u_1 + u_2) = F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) =$

$= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$

$= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2)$ ①

$F(u_1) + F(u_2) = (2x_1 + y_1, x_1 - y_1 + 2) + (2x_2 + y_2, x_2 - y_2 + 2) =$

$= (2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2 + 2 + 2) =$

$= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 4)$ ②

① $\neq$ ②

Άρα δεν είναι γραμμική

ή $F(0,0) = (2 \cdot 0 + 0, 0 - 0 + 2) = (0, 2) \neq (0,0)$

Άρα δεν είναι γραμμική

2/ $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $F(x,y,z) = (x+y+z, xy)$

2/ $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $F(x,y,z) = (x+y+z\ ,\ xy)$

$F(0,0,0) = (0+0+0\ ,\ 0\cdot 0) = (0,0)$

Έστω $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ κ' $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$F(u_1+u_2) = F((x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) =$

$= F(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2\ ,\ z_1+z_2) =$

$= ((x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2)\ ,\ (x_1+x_2)\cdot(y_1+y_2))$

$= ((x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2)\ ,\ \underbrace{x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2}_{!})$ ①

$F(u_1) + F(u_2) = F(x_1,y_1,z_1) + F(x_2,y_2,z_2) =$

$= (x_1+y_1+z_1\ ,\ x_1y_1) + (x_2+y_2+z_2\ ,\ x_2y_2) =$

$= ((x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2)\ ,\ \underbrace{x_1y_1 + x_2y_2}_{!})$ ②

① $\neq$ ②

$u_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$F(\lambda u_1) = F(\lambda(x_1, y_1, z_1)) =$

$= F(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) =$

$= (\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1\ ,\ \lambda x_1 \cdot \lambda y_1) =$

$= (\lambda(x_1+y_1+z_1)\ ,\ \lambda^2(x_1\cdot y_1)) =$

$= \lambda(x_1+y_1+z_1\ ,\ \lambda(x_1y_1)) \neq \lambda F(u_1)$

$\lambda F(u_1) = \lambda F(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_1+y_1+z_1\ ,\ x_1y_1)$

Παράδειγμα.

Έστω A πίνακας πραγματικών αριθμών μεγέθους $m \times n$ τότε η απεικόνιση

$$f : R^n \to R^m \text{ με } f(u) = Au \quad \text{είναι γραμμική}$$

Έστω $u_1, u_2 \in R^n$

Θέλω ν.δ.ο

$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

$f(u_1 + u_2) = A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = f(u_1) + f(u_2)$

Θέλω ν.δ.ο

$f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1)$

$f(\lambda u_1) = A(\lambda u_1) = \lambda(Au_1) = \lambda f(u_1)$

ή $\lambda, \mu \in R$

Αρκεί ν.δ.ο $f(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2)$

$$f(\lambda u_1 + \mu u_2) = A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A u_1 + \mu A u_2 =$$
$$= \lambda f(u_1) + \mu f(u_2)$$

Άρα γραμμική

Παράδειγμα.

Δίνεται η απεικόνιση

$f : R^2 \to R^3$ με $f(x, y) = (x, y, x + y)$

Ν.δ.ο είναι γραμμική.

Έστω $u_1 = (x_1, y_1)$ $u_2 = (x_2, y_2) \in R^2$

Θ.ν.δ.ο

$$F(u_1+u_2)=F(u_1)+F(u_2)$$

$$F(u_1+u_2)=F\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)=$$

$$=F(x_1+x_2,\ y_1+y_2)=$$

$$=\big((x_1+x_2),(y_1+y_2),(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\big) \quad (1)$$

$$F(u_1)+F(u_2)=F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)=$$

$$=(x_1,y_1,x_1+y_1)+(x_2,y_2,x_2+y_2)=$$

$$=\big((x_1+x_2),(y_1+y_2),(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\big) \quad (2)$$

$$(1)=(2) \Leftrightarrow F(u_1+u_2)=F(u_1)+F(u_2)$$

Θ.ν.δ.ο $F(\lambda u_1)=\lambda F(u_1)$ $\quad \lambda\in\mathbb{R}$.

$$F(\lambda u_1)=F(\lambda(x_1,y_1))=$$

$$=F(\lambda x_1,\lambda y_1)=$$

$$=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda x_1+\lambda y_1)=$$

$$=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda(x_1+y_1))=$$

$$=\lambda(x_1,y_1,x_1+y_1)=$$

$$=\lambda\cdot F(u_1)$$

Άρα γραμμική.

ή $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Θ.ν.δ.ο $F(\lambda u_1+\mu u_2)=\lambda F(u_1)+\mu F(u_2)$

Έστω V κ W διανυσματικοί χώροι κ' $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ βάση του V κ' $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ στοιχεία του W. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$ τέτοια ώστε

$$f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2,\ \dots,\ f(v_n) = w_n$$

Κάθε στοιχείο του V γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, έστω $v \in V$ τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n \in F$ έτσι ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

$$= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τον τύπο της γραμ. απεικόνισης $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αν είναι γνωστό ότι $f(1,0) = (2,3)$, $f(1,1) = (-1,1)$

τα διαν. $(1,0)$ κ' $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ και αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$ άρα να πάρω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ τότε το (x,y) θα μπορεί να γραφτεί ως γραμ. συνδυασμός των $(1,0)$, $(1,1)$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή F

$$(x,y) = \lambda(1,0) + \mu(1,1) = (\lambda, 0) + (\mu, \mu) = (\lambda + \mu, \mu)$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; f

$(x,y) = \lambda(1,0) + \mu(1,1) = (\lambda,0) + (\mu,\mu) = (\lambda+\mu, \mu)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda+\mu \\ y &= \mu \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \lambda &= x-\mu \\ y &= \mu \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \lambda &= x-y \\ \mu &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \lambda f(1,0) + \mu f(1,1) = \\ &= \lambda(2,3) + \mu(-1,1) = \\ &= (x-y)(2,3) + y(-1,1) = \\ &= (2x-2y, 3x-3y) + (-y,y) = \\ &= (2x-3y, 3x-2y) \end{aligned}$$

Άρα η γρ. απεικ. $f(x,y) = (2x-3y, 3x-2y)$

Έστω ότι $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$

$S_U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

$S_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$$\begin{pmatrix} f(u_1) \\ f(u_2) \\ \vdots \\ f(u_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Το αριστερό μέλος είναι πίνακας $m \times n$

Το δεξί μέλος ανήκει στο $\mathbb{R}^{n\times 1}$

(κάθε γραμμή στο δεξί είναι στοιχείο S_V)

Το δεξί μέλος ...
(κάθε γραμμή του δεξ. είναι στοιχείο S_v)

Αν πάρουμε τη φυσική βάση των χώρων R^n κ' R^n

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = I_n \qquad \begin{aligned} e_1 &= (1,0,\dots,0) \\ e_2 &= (0,1,\dots,0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0,0,\dots,1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ & \vdots & & \\ a_{1m} & a_{2m} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$$
$$f(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$$
$$\vdots$$
$$f(e_n) = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm})$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m \qquad x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\right) = x_1 f(e_1) + \dots x_m f(e_m)$$

$$= (x_1 a_{11}, x_1 a_{21}, \dots, x_1 a_{n1}) + (x_2 a_{12}, x_2 a_{22}, \dots, x_2 a_{n2}) + \dots$$

$$\dots (x_m a_{1m}, x_m a_{2m}, \dots, x_m a_{nm})$$

$$= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots \quad , \qquad , \dots , \qquad)$$

$$= Ax$$

$$\forall \; \dots \; R^m \to R^n \quad f \quad A \in R^{n \times m} \; : \; f(x) = Ax$$

$\forall\, F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad \exists\, A \in \mathbb{R}^{n\times m} : F(x) = Ax$

Παράδειγμα Δίνεται η απεικόνιση

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $F(x,y) = (x,y,x+y)$

Να βρεθεί ο πίνακας που αντιστοιχεί ως προς τη φυσική βάση.

$u \in \mathbb{R}^2 \quad u = (x,y)$

$$F(u) = F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ή

Αν πάρω τη φυσική βάση $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$F(e_1) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(e_2) = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μου

$$A = \big(F(e_1), F(e_2) \big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Γραμμική απεικόνιση $F: U \to V$ και φίξες 2 υποχώρους στους χώρους U, V

Ο είναι υπόχωρος ονομάζεται <u>Εικόνα</u> της γραμμικής απεικόνισης.

Ο ένας υπόχωρος ονομάζεται εικόνα της γρ. απεικόνισης.

Εικόνα: Είναι το σύνολο των εικόνων όλων των στοιχείων του U και λέγεται εικόνα της γραμ. απεικ. με συμβολισμό $Im(F)$

Ο άλλος υπόχωρος ονομάζεται πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης.

Πυρήνας: Είναι το σύνολο των στοιχείων του U τα οποία μέσω της απεικόνισης απεικονίζονται στο μηδενικό στοιχείο του V, αυτό καλείται πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης και συμβολίζεται με $Ker(F)$.

Για τις διαστάσεις των χώρων $Im(F)$ και του $Ker(F)$ ισχύει:

$$\dim(U) = \dim(Im(F)) + \dim(Ker(F)).$$

Παράδειγμα

Να βρεθούν ο πυρήνας και η εικόνα της γραμ. απεικ.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y) = (x, y, x+y)$

Εικόνα: $F(u) = F(x,y) = (x, y, x+y) =$

$u \in \mathbb{R}^2$, $u = (x,y)$

$$= (x, 0, x) + (0, y, y) =$$
$$= x(1,0,1) + y(0,1,1)$$

Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ παράγεται από τα διαν.

$(1,0,1)$ κ' $(0,1,1)$

$$Im(F) = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$$

$$\dim(Im(F)) = 2$$

Πυρήνας: $F(u) = f(x,y) = (x, y, x+y) = (0,0,0)$

$u \in \mathbb{R}^2$, $u = (x,y)$, $F(u) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}$$

$$u = (x,y) = (0,0)$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί γραμμ. απεικ. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: ο πυρήνας της να παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,1)$ κ' $(2,1,3)$ και η εικόνα της να παράγεται από το $(1,4,6)$.

Τα διανύσματα $(1,0,1)$ κ' $(2,1,3)$ ανήκουν στον $Ker(f)$

δηλαδή $f(1,0,1)=(0,0,0)$

$f(2,1,3)=(0,0,0)$

Αν πάρω ένα διάνυσμα έστω $(1,0,0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ γρ. ανεξ.}$$

Αν θεωρήσω το $S=\{(1,0,1),(2,1,3),(1,0,0)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

Αν θεωρήσω ότι $f(1,0,0)=(1,4,6)$

$$(x,y,z)=\kappa(1,0,1)+\lambda(2,1,3)+\mu(1,0,0) \qquad \kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$
$$=(\kappa,0,\kappa)+(2\lambda,\lambda,3\lambda)+(\mu,0,0)$$
$$=(\kappa+2\lambda+\mu,\ \lambda,\ \kappa+3\lambda)$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\kappa+2\lambda+\mu \\ y&=\lambda \\ z&=\kappa+3\lambda \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \kappa&=z-3y \\ \lambda&=y \\ \mu&=x+y-z. \end{aligned}\right\}$$

$$(x,y,z)=(z-3y)(1,0,1)+y(2,1,3)+(x+y-z)(1,0,0)$$
$$f(x,y,z)=(z-3y)f(1,0,1)+y\,f(2,1,3)+(x+y-z)f(1,0,0)$$
$$=(z-3y)(0,0,0)+y(0,0,0)+(x+y-z)(1,4,6)$$
$$=(0,0,0)+(0,0,0)+(x+y-z,\ 4(x+y-z),\ 6(x+y-z))=$$
$$=(x+y-z,\ 4(x+y-z),\ 6(x+y-z))$$

Έστω η γραμμ. απεικ. $f: V\to V$

Έστω η γραμ. απεικ. $f: U \to V$

- f είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) όταν 2 διαφορετικά στοιχεία του U έχουν διαφορετικές εικόνες στο V

$u_1 \neq u_2 \Rightarrow f(u_1) \neq f(u_2)$

ή

$f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$

- f είναι (επί) του V όταν $\forall v \in V \ \exists u \in U : f(u) = v$

Όταν f είναι αμφιμονοσήμαντη κ' επί το V ονομάζεται ισομορφισμός. Οι U κ' V χώροι ονομάζονται τότε ισόμορφοι.

Μια γρ. απεικ. είναι αμφιμονοσήμαντη $\iff \ker(f) = 0$

Δύο χώροι V κ' W είναι ισόμορφοι αν έχουν την ίδια διάσταση δηλ. $\dim(V) = \dim(W)$.

Στις γραμ. απεικονίσεις.

- Πρόσθεση: Έστω $f, G : V \to W$

$$(f+G)(x) = f(x) + G(x)$$

- Αριθμητικό γινόμενο: Έστω $f : V \to G$ $\quad a \in F$

$$(a.f)(x) = a f(x)$$

- Σύνθεση $\quad G : U \to V \quad f : V \to W$

$$f \circ G : U \to W \quad \left((f \circ G)(x) = f(G(x)) \right)$$

Έστω S_V, S_W βάσεις των V κ' W κ' A, B πίνακες αναπαράστασης των f, G

- τότε ο πίνακας αναπαράστασης $f+G$ ως προς τις ίδιες βάσεις είναι $A+B$
- ο πίνακας αναπαράστασης της $a.f$ θα είναι $a.A$
- ο πίνακας αναπαράστασης (σύνθεσης) BA

Έστω $f : V \to W$ μια αντιστρέψιμη γρ. απεικ. τότε κ' η $f^{-1} : W \to V$ είναι γραμμική $_{V κ' W}$

η $F^{-1}: W \to V$ είναι γραμμική

Αν S_V, S_W 2 βάσεις αντίστοιχα των V κ W και A ο πίνακας αναπαράστασης $F: V \to W$ τότε ο πίνακας αναπαράστασης της $F^{-1}: W \to V$ είναι ο A^{-1}

Έστω $F: V \to W$ γρ. απεικ.. Τότε $\forall$ επιλογή βάσεων S_V, S_W των V κ W, έχουμε ότι η διάσταση της εικόνας της γραμ. απεικ. είναι ίση με την τάξη του πίνακα αναπαράστασης.

Παράδειγμα

Δίνεται η απεικόνιση $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = (2x+y-z,\ y+z,\ x+2y+3z)$$

Ν.δ.ο. είναι γραμμική

Να βρεθεί ο πίνακας που αντιστοιχεί ως προς την κανονική βάση, η εικόνα της F και μια βάση και ο πυρήνας και μια βάση του.

Έστω $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F(\lambda u_1 + \mu u_2) &= F(\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) = \\
&= F((\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) + (\mu x_2, \mu y_2, \mu z_2)) = \\
&= F((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)) = \\
&= \big(2(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), \\
&\quad (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2), \\
&\quad (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + 3(\lambda z_1 + \mu z_2)\big) = \\
&= \big((2\lambda x_1 + \lambda y_1 - \lambda z_1) + (2\mu x_2 + \mu y_2 - \mu z_2), \\
&\quad (\lambda y_1 + \lambda z_1) + (\mu y_2 + \mu z_2), \\
&\quad (\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1) + (\mu x_2 + 2\mu y_2 + 3\mu z_2)\big) = \\
&\quad (\ldots) \quad (2\mu x_2 + \mu y_2 - \mu z_2))
\end{aligned}$$

$(\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1) + (\ldots)$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2\lambda x_1 + \lambda y_1 - \lambda z_1 \\ \lambda y_1 + \lambda z_1 \\ \lambda x_1 + 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu x_2 + \mu y_2 - \mu z_2 \\ \mu y_2 + \mu z_2 \\ \mu x_2 + 2\mu y_2 + 3\mu z_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 - z_1 \\ y_1 + z_1 \\ x_1 + 2y_1 + 3z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2x_2 + y_2 - z_2 \\ y_2 + z_2 \\ x_2 + 2y_2 + 3z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda F(u_1) + \mu F(u_2)$$

ή $F(u_1 + u_2) = \ldots = F(u_1) + F(u_2)$

$F(\lambda u_1) = \ldots = \lambda F(u_1)$

$Im(F)$

$$F(u) = F(x,y,z) = (2x + y - z,\ y + z,\ x + 2y + 3z) =$$
$$= (2x, 0, x) + (y, y, 2y) + (-z, z, 3z) =$$
$$= x(2, 0, 1) + y(1, 1, 2) + z(-1, 1, 3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) + (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) =$$
$$= 2 \cdot 1 + 2 = 4 \neq 0 \text{ γ.αν.}$$

άρα βάση του $Im(F)$ $\quad \dim(Im F) = 3 \rightarrow \dim(Ker F) = 0$

άρα ο πυρήνας έχει μόνο το 0 στοιχείο

$f(u) = f(x,y,z) = (2x+y-z,\ y+z,\ x+2y+3z) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} 2x+y-z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$(0,0,0)$ βάση του $Ker(f)$

Διαφορετικά:

$f(u) = 0$ τ.ι.

$$\begin{aligned} 2x+y-z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 0 \end{aligned}$$

γ.ε. έχει μόνο την μηδενική λύση

$Ker(f) = 0$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (2,0,1)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,1,2)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,1,3)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$