



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ



ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ
ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

MBA με κατεύθυνση Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης
(MBA in Management Information Systems)

Τηλ.: 2462061614, e-mail: mba-gre@uowm.gr

Μάθημα: Στατιστική των Επιχειρήσεων

Διδάσκων: Καθηγητής Γιώργος Κοντέος

gkonteos@uowm.gr

4. Δειγματοληπτική κατανομή για αναλογίες

4. Δειγματοληπτική κατανομή για αναλογίες

Τι είναι η δειγματική αναλογία;

Αν σε έναν πληθυσμό υπάρχει μια πραγματική αναλογία p (π.χ. το 40% των μαθητών αγαπούν τα μαθηματικά), τότε σε ένα δείγμα μεγέθους n :

$$\hat{p} = \frac{\text{επιτυχίες στο δείγμα}}{n}$$

Πώς κατανέμεται η δειγματική αναλογία;

Για αρκετά μεγάλο n , η δειγματική αναλογία ακολουθεί **προσεγγιστικά την κανονική κατανομή**:

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Δηλαδή:

- **Μέση τιμή:** $E(\hat{p}) = p$
- **Τυπικό σφάλμα της αναλογίας (Standard Error):**

$$SE_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Πότε ισχύει η κανονική προσέγγιση;

Χρειαζόμαστε το γνωστό "κανόνα των 10", δηλαδή πρέπει:

$$np \geq 10 \text{ και } n(1-p) \geq 10$$

Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κατανομή της $\hat{p}$ είναι περίπου κανονική.

Επομένως, η **δειγματοληπτική κατανομή για αναλογίες** είναι η κατανομή των πιθανών τιμών που μπορεί να πάρει η **δειγματική αναλογία** $\hat{p}$ όταν παίρνουμε πολλά τυχαία δείγματα από έναν πληθυσμό με πραγματική αναλογία p .

Παράδειγμα: Έστω ότι: $p = 0,4$ και $n = 100$. Τότε:

$$SE = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}} = \sqrt{0,0024} \approx 0,049$$

Άρα: $\hat{p} \sim N(0,4, 0,049)$. Δηλαδή, τα περισσότερα δείγματα θα δώσουν τιμές γύρω από 0,4 (40%), με μικρές αποκλίσεις.

Στην πράξη, επειδή η πραγματική αναλογία p συνήθως δεν είναι γνωστή, χρησιμοποιούμε την **εκτιμημένη αναλογία του δείγματος**:

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Αυτό είναι το τυπικό σφάλμα της εκτιμώμενης αναλογίας και δείχνει πόσο μεταβάλλεται η $\hat{p}$ από δείγμα σε δείγμα.

Άσκηση: Σε ένα δείγμα που περιλαμβάνει $n = 200$ επιχειρήσεις λιανικής πώλησης βρέθηκαν 90 που κάνουν πωλήσεις μέσω Internet. α) Υπολόγισε τη δειγματική αναλογία $\hat{p}$. β) Υπολόγισε το $SE_{\hat{p}}$.

Λύση

$$\alpha) \hat{p} = \frac{90}{200} = 0,45$$

$$\beta) SE_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{200}}$$

Υπολογισμός βήμα-βήμα: $0,45 \cdot 0,55 = 0,2475$. Διαιρούμε με 200: $0,2475/200 = 0,0012375$. Τετραγωνική ρίζα: $SE_{\hat{p}} \approx 0,0352$.

Πεπερασμένος πληθυσμός:

Για πεπερασμένο πληθυσμό, το τυπικό σφάλμα της δειγματικής αναλογίας διορθώνεται με τον **συντελεστή διόρθωσης για πεπερασμένο πληθυσμό**:

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

ή στην περίπτωση του δείγματος:

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

Όπου:

- N = μέγεθος πληθυσμού
- n = μέγεθος δείγματος
- p ή $\hat{p}$ = αναλογία πληθυσμού/δείγματος
- Η παράμετρος $\sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$ είναι η διόρθωση για πεπερασμένο πληθυσμό

Η διόρθωση εφαρμόζεται όταν το δείγμα είναι πάνω από 5% του πληθυσμού:

$$\frac{n}{N} > 0,05$$

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε έναν πληθυσμό: $N = 2000$ άτομα που αγόρασαν πρόσφατα αυτοκίνητο και πήραμε από τον πληθυσμό αυτόν δείγμα: $n = 300$ άτομα. Στο δείγμα, το ποσοστό που έχει αγοράσει ηλεκτρικό αυτοκίνητο είναι: $\hat{p} = 0,40$.

Θέλουμε να βρούμε το **τυπικό σφάλμα της δειγματικής αναλογίας με διόρθωση για πεπερασμένο πληθυσμό:**

$$\begin{aligned} SE(\hat{p}) &= \left(\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right) \left(\sqrt{\frac{N - n}{N - 1}} \right) = \left(\sqrt{\frac{0,40 \cdot 0,60}{300}} \right) \left(\sqrt{\frac{2000 - 300}{2000 - 1}} \right) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{0,24}{300}} \right) \left(\sqrt{\frac{1700}{1999}} \right) = (\sqrt{0,0008}) (\sqrt{0,8504}) = (0,02828)(0,9222) = 0,02607 \end{aligned}$$

Το τυπικό σφάλμα της δειγματικής αναλογίας με διόρθωση για πεπερασμένο πληθυσμό είναι: $SE(\hat{p}) = 0,026$.