



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ



ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ
ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

MBA με κατεύθυνση Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης
(MBA in Management Information Systems)

Τηλ.: 2462061614, e-mail: mba-gre@uowm.gr

Μάθημα: Στατιστική των Επιχειρήσεων

Διδάσκων: Καθηγητής Γιώργος Κοντέος

gkonteos@uowm.gr

3. Δειγματοληπτική κατανομή του μέσου

3. Δειγματοληπτική κατανομή του μέσου

Η **δειγματοληπτική κατανομή του μέσου** (sampling distribution of the mean) είναι μια θεμελιώδης έννοια στη στατιστική και στη θεωρία πιθανοτήτων. Είναι η **κατανομή των τιμών του μέσου όρου** που θα προέκυπταν αν παίρναμε **πολλά δείγματα** ίδιου μεγέθους n από τον ίδιο πληθυσμό και υπολογίζαμε το μέσο όρο $\bar{x}$ κάθε δείγματος. Δεν αφορά τα δεδομένα του πληθυσμού — αφορά τους **μέσους όρους των δειγμάτων**.

Ιδιότητες της δειγματοληπτικής κατανομής του μέσου

Μέση τιμή: Ο μέσος της κατανομής των δειγματικών μέσων είναι: $\mu_{\bar{x}} = \mu$, δηλαδή **ίδιος με τον πραγματικό μέσο του πληθυσμού**.

Διασπορά / Τυπικό σφάλμα: Η διασπορά των δειγματικών μέσων είναι:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

όπου:

- σ = τυπική απόκλιση του πληθυσμού
- n = μέγεθος δείγματος
- $\sigma_{\bar{x}}$ = τυπικό σφάλμα του μέσου (standard error)

Άρα όσο **μεγαλώνει το δείγμα**, τόσο **μικρότερο** είναι το τυπικό σφάλμα (δηλαδή η διασπορά των δειγματικών μέσων), και όσο **μεγαλύτερη είναι η τυπική απόκλιση** του πληθυσμού τόσο **μεγαλύτερο** είναι το τυπικό σφάλμα.

Σχήμα της κατανομής: Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- **Αν ο πληθυσμός είναι κανονικός**, τότε και η κατανομή των δειγματικών μέσων είναι **κανονική**, ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος n .
- **Αν ο πληθυσμός δεν είναι κανονικός**, τότε για **μεγάλα δείγματα** ($n \geq 30$), η δειγματοληπτική κατανομή του μέσου γίνεται **προσεγγιστικά κανονική** λόγω του **Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (ΚΟΘ)**.

Γιατί είναι σημαντική; Επειδή μας επιτρέπει να:

- κάνουμε **εκτιμήσεις** για τον μέσο του πληθυσμού,
- υπολογίζουμε **διαστήματα εμπιστοσύνης**,
- εκτελούμε **ελέγχους υποθέσεων**.

Παράδειγμα: Έστω πληθυσμός με μέσο $\mu = 50$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 10$. Αν πάρουμε δείγματα μεγέθους $n = 25$ το τυπικό σφάλμα του μέσου θα είναι:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

Οπότε οι δειγματικοί μέσοι θα έχουν κατανομή περίπου κανονική $\bar{x} \sim N(50, 2)$.

Άσκηση 1: Τι θα συμβεί στο τυπικό σφάλμα $\sigma_{\bar{X}}$ όταν διπλασιάσουμε το μέγεθος δείγματος n ;

Λύση: Αν διπλασιάσουμε n σε $2n$,

$$\sigma_{\bar{X}, \text{νέο}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma_{\bar{X}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Άρα μειώνεται κατά τον παράγοντα $1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ (μείωση $\approx 29.29\%$).

Άσκηση 2: Έστω πληθυσμός με $\mu = 100$, και $\sigma = 20$. Υπολογίστε το τυπικό σφάλμα για $n = 4$, $n = 16$, $n = 100$.

Λύση: Δεδομένα: $\mu = 100$, $\sigma = 20$. Υπολογίζουμε $\sigma_{\bar{X}} = 20/\sqrt{n}$.

- Για $n = 4$: $\sqrt{4} = 2 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = 20/2 = 10$.
- Για $n = 16$: $\sqrt{16} = 4 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = 20/4 = 5$.
- Για $n = 100$: $\sqrt{100} = 10 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = 20/10 = 2$.

Άσκηση 3: Αν ο αρχικός πληθυσμός είναι εξαιρετικά ασύμμετρος, θα είναι κανονική η κατανομή των δειγματικών μέσων για $n = 5$ ή για $n = 50$;

Λύση: Αν ο πληθυσμός είναι πολύ ασύμμετρος:

- Για μικρό n (π.χ. $n = 5$) η κατανομή των δειγματικών μέσων δεν θα είναι κανονική — η ασυμμετρία μεταφέρεται.
- Για μεγάλο n (π.χ. $n = 50$) το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) λέει ότι η δειγματοληπτική κατανομή του μέσου προσεγγίζει την κανονική, ανεξάρτητα από την κατανομή του αρχικού πληθυσμού.