



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ



ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ
ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

MBA με κατεύθυνση Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης
(MBA in Management Information Systems)

Τηλ.: 2462061614, e-mail: mba-gre@uowm.gr

Μάθημα: Στατιστική των Επιχειρήσεων

Διδάσκων: Καθηγητής Γιώργος Κοντέος

gkonteos@uowm.gr

2. Κανονική κατανομή

2. Κανονική κατανομή

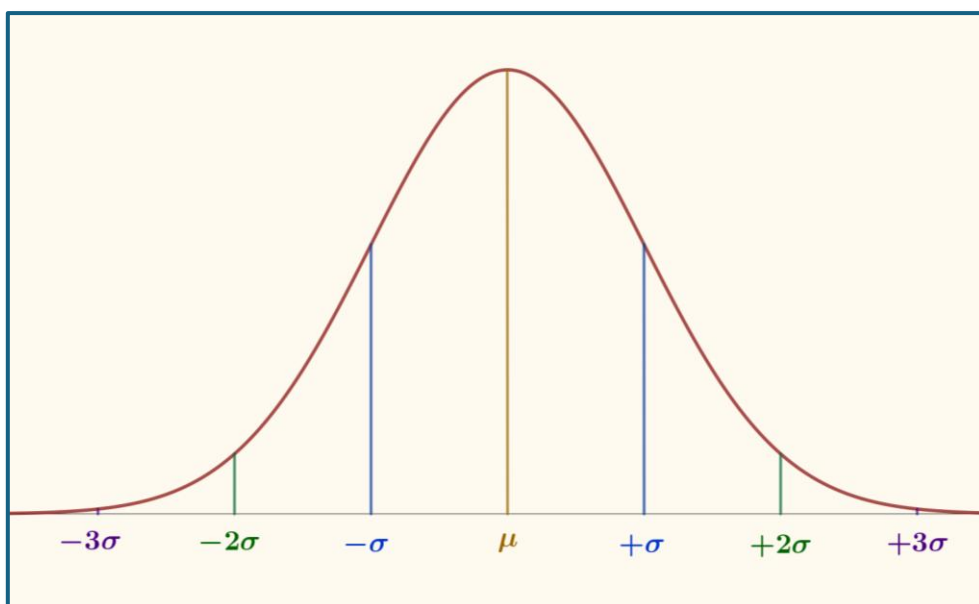
Είναι βασικό να κατανοήσουμε την **κανονική κατανομή** (normal distribution) επειδή πολλά φυσικά φαινόμενα ακολουθούν αυτή τη μορφή, η οποία είναι συμμετρική και σε σχήμα **καμπάνας** (bell curve). Λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με κάποιον μέσο μ και κάποια διακύμανση σ^2 ή τυπική απόκλιση σ και συμβολίζουμε: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ή $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Εμπειρικός κανόνας

Ο εμπειρικός κανόνας ισχύει για την **κανονική κατανομή** και παρέχει μια γρήγορη εκτίμηση του ποσοστού των δεδομένων που βρίσκεται σε συγκεκριμένα διαστήματα γύρω από τον μέσο (μ), χρησιμοποιώντας την τυπική απόκλιση (σ).

- Περίπου το **68%** των δεδομένων βρίσκεται **εντός μίας τυπικής απόκλισης** από τον μέσο (μ), δηλαδή στο διάστημα $\mu \pm \sigma$.
- Περίπου το **95%** των δεδομένων βρίσκεται **εντός δύο τυπικών αποκλίσεων** από τον μέσο (μ), δηλαδή στο διάστημα $\mu \pm 2\sigma$.
- Περίπου το **99,7%** των δεδομένων βρίσκεται **εντός τριών τυπικών αποκλίσεων** από τον μέσο (μ), δηλαδή στο διάστημα $\mu \pm 3\sigma$.

Ο κανόνας αυτός είναι χρήσιμος για να ελέγξουμε αν μια κατανομή είναι περίπου κανονική και για να εντοπίσουμε πιθανές **ακραίες τιμές**.



Παράδειγμα: Αν $\mu = 100$ και $\sigma = 10$, τότε:

- 68% των τιμών βρίσκονται μεταξύ 90 και 110
- 95% μεταξύ 80 και 120
- 99,7% μεταξύ 70 και 130

Εύρεση Πιθανοτήτων με z-τιμές

Για να βρούμε με ακρίβεια τις πιθανότητες (το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη) για οποιαδήποτε κανονική κατανομή $X \sim N(\mu, \sigma)$, χρησιμοποιούμε την **τυπική κανονική κατανομή** ή **z-κατανομή**.

1. Τυποποίηση (υπολογισμός z-τιμής)

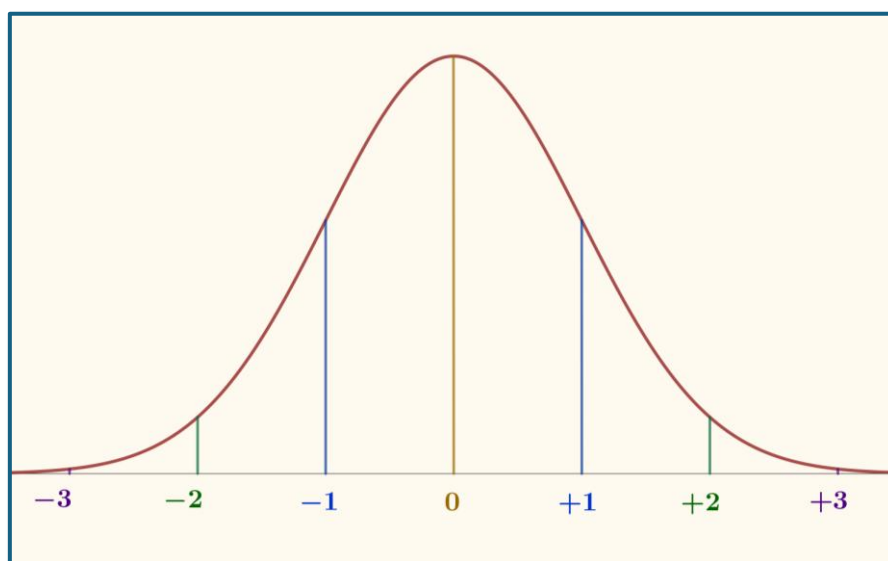
Η z-τιμή μας λέει πόσες **τυπικές αποκλίσεις** (σ) πάνω ή κάτω από τον μέσο (μ) βρίσκεται μια συγκεκριμένη τιμή (x). Ο τύπος για τον υπολογισμό της τιμής είναι:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- x : η τιμή της τυχαίας μεταβλητής.
- μ : ο μέσος της κατανομής.
- σ : η τυπική απόκλιση της κατανομής.

Μετασχηματίζοντας την αρχική μεταβλητή σε z , η νέα κατανομή είναι η **τυπική κανονική κατανομή** $Z \sim N(0, 1)$, η οποία έχει:

- Μέσο ίσο με 0 ($\mu = 0$).
- Τυπική απόκλιση ίση με 1 ($\sigma = 1$).



2. Χρήση του πίνακα

Αφού υπολογιστεί η z -τιμή, χρησιμοποιείται ο **πίνακας της τυπικής κανονικής κατανομής** (γνωστός και ως Πίνακας Z), ο οποίος δίνει την **πιθανότητα** (εμβαδόν) από το $-\infty$ μέχρι τη συγκεκριμένη τιμή. Αυτή η πιθανότητα συμβολίζεται ως ή $P(Z < z)$ ή $F(z)$.

3. Υπολογισμός διαφόρων πιθανοτήτων

Με τη χρήση του πίνακα και τις ιδιότητες της συμμετρίας της κατανομής, μπορούμε να υπολογίσουμε:

Ζητούμενη πιθανότητα	Σχέση με $F(z)$
$P(Z < z)$	$F(z)$
$P(Z > z)$	$1 - F(z)$
$P(z_1 < z < z_2)$	$F(z_2) - F(z_1)$

4. Αντίστροφη χρήση (εύρεση x όταν γνωρίζουμε την πιθανότητα)

Χρησιμοποιείται για να βρούμε μία τιμή x όταν γνωρίζουμε το ποσοστό (πιθανότητα).

Βήματα:

1. Βρίσκουμε το αντίστοιχο **αθροιστικό εμβαδόν** (πιθανότητα αριστερά).
2. Χρησιμοποιούμε τον πίνακα Z για να βρούμε την αντίστοιχη z -τιμή.
3. Υπολογίζουμε την x τιμή:

$$x = \mu + z\sigma$$

Παράδειγμα 1: Υποθέτουμε ότι το ύψος των ενήλικων γυναικών σε μια χώρα ακολουθεί την κανονική κατανομή με:

- Μέσο $\mu = 165$ εκ.
- Τυπική απόκλιση $\sigma = 5$ εκ.

Δηλαδή, $X \sim N(165, 5)$.

1. Εφαρμογή Εμπειρικού Κανόνα

Ας χρησιμοποιήσουμε τον εμπειρικό κανόνα για να βρούμε τα διαστήματα ύψους:

Ποσοστό	Διάστημα $\mu \pm \sigma$	Υπολογισμός	Ερμηνεία
68%	$\mu \pm 1\sigma$	$165 \pm 5 \rightarrow (160, 170)$	Το 68% των γυναικών έχει ύψος μεταξύ 160 εκ. και 170 εκ.
95%	$\mu \pm 2\sigma$	$165 \pm 2(5) \rightarrow (155, 175)$	Το 95% των γυναικών έχει ύψος μεταξύ 155 εκ. και 175 εκ.
99,7%	$\mu \pm 3\sigma$	$165 \pm 3(5) \rightarrow (150, 180)$	Το 99,7% των γυναικών, δηλαδή σχεδόν όλες οι γυναίκες, έχουν ύψος μεταξύ 150 εκ. και 180 εκ.

2. Εύρεση Πιθανότητας με Τιμή

Ερώτημα: Ποια είναι η πιθανότητα μια τυχαία επιλεγμένη γυναίκα να έχει ύψος μεγαλύτερο από 173 εκατοστά;

• Τυποποίηση (Υπολογισμός τιμής):

Η τιμή που μας ενδιαφέρει είναι $x = 173$. Η z-τιμή είναι:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{173 - 165}{5} = \frac{8}{5} = 1,60$$

Η τιμή $x = 173$ βρίσκεται 1,60 τυπικές αποκλίσεις πάνω από τον μέσο.

• Αναζήτηση στον Πίνακα Z:

Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(x > 173)$ οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} P(x > 173) &= P(z > 1,60) = 1 - P(z < 1,60) = 1 - F(1,60) = 1 - 0,9452 \\ &= 0,0548 \end{aligned}$$

Απάντηση: Η πιθανότητα μια γυναίκα να έχει ύψος μεγαλύτερο από 173 εκ. είναι 0,0548 ή 5,48%.

Παράδειγμα 2: Ο χρόνος (σε λεπτά) που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μια εργασία από έναν εργαζόμενο ακολουθεί την κανονική κατανομή $X \sim N(35, 4)$.

1. Χρησιμοποιήστε τον εμπειρικό κανόνα για να βρείτε το διάστημα χρόνου εντός του οποίου βρίσκεται το 95% των εργαζομένων.
2. Ποια είναι η πιθανότητα ένας εργαζόμενος να ολοκληρώσει την εργασία σε χρόνο μικρότερο από 30 λεπτά;

Λύση

1. Εμπειρικός Κανόνας (95%)

Το 95% των δεδομένων βρίσκεται μέσα σε διάστημα δύο τυπικών αποκλίσεων από το μέσο ($\mu \pm 2\sigma$). Έχουμε λοιπόν, $\mu \pm 2\sigma = 35 \pm 2(4) = 35 \pm 8 = (27, 43)$. Επομένως, Το 95% των εργαζομένων ολοκληρώνει την εργασία μεταξύ 27 και 43 λεπτών.

2. Τιμή και Πιθανότητα $P(x < 30)$

(α) Τυποποίηση: Βρίσκουμε τη z-τιμή για $x = 30$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{30 - 35}{4} = -\frac{5}{4} = -1,25$$

(β) Εύρεση Πιθανότητας: $P(x < 30) = P(z < -1,25) = F(-1,25) = 0,1056$

Η πιθανότητα ένας εργαζόμενος να ολοκληρώσει την εργασία σε λιγότερο από 30 λεπτά είναι 0,1056 ή 10,56%.

Παράδειγμα 3: Ένα εργοστάσιο παράγει λαμπτήρες. Η διάρκεια ζωής τους σε ώρες ακολουθεί την κανονική κατανομή $X \sim N(1000, 50)$. Ποια είναι η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος λαμπτήρας να έχει διάρκεια ζωής μεταξύ 950 ωρών και 1075 ωρών;

Λύση

Βήμα 1: Τυποποίηση των δύο ορίων

Υπολογίζουμε τη z_1 -τιμή για $x_1 = 950$ και τη z_2 -τιμή για $x_2 = 1075$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{950 - 1000}{50} = \frac{-50}{50} = -1,00$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{1075 - 1000}{50} = \frac{75}{50} = 1,50$$

Έχουμε:

$$P(950 < x < 1075) = P(x_1 < x < x_2) = P(z_1 < z < z_2) = P(-1,00 < z < 1,50)$$

$$= F(1,50) - F(-1,00) = 0,9332 - 0,1587 = 0,7745$$

Υπενθυμίζεται ότι οι παραπάνω πιθανότητες προέκυψαν από τον πίνακα της κανονικής κατανομής ως εξής:

Για την τιμή $F(1,50)$

z	Δεύτερο δεκαδικό του z									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545

Για την τιμή $F(-1,00)$

z	Δεύτερο δεκαδικό του z									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611

Επομένως, η πιθανότητα ένας λαμπτήρας να έχει διάρκεια ζωής μεταξύ 950 και 1075 ωρών είναι 0,7745 ή 77,45%.

Παράδειγμα 4: Στις βαθμολογίες μιας εξέτασης ισχύουν $\mu = 75$ και $\sigma = 8$. Η Σχολή αποφασίζει ότι μόνο το 10% των φοιτητών με τις υψηλότερες βαθμολογίες θα πάρει τιμητική διάκριση. Ποια είναι η ελάχιστη βαθμολογία (x) που πρέπει να πετύχει ένας φοιτητής για να πάρει τιμητική διάκριση;

Λύση

Βήμα 1: Εύρεση της τιμής

Ψάχνουμε το σημείο (βαθμός) ώστε το εμβαδόν δεξιά του να είναι (10%). Επειδή ο πίνακας δίνει το εμβαδόν αριστερά, πρέπει να υπολογίσουμε το αθροιστικό εμβαδόν μέχρι το σημείο 90%, επομένως ψάχνουμε στο εσωτερικό του Πίνακα την τιμή που είναι πιο κοντά στο 0,9000.

z	Δεύτερο δεκαδικό του z									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

Η τιμή 0,8997 είναι πιο κοντινή στο 0,9000 και αντιστοιχεί στη τιμή $z = 1,28$.

Βήμα 2: Υπολογισμός της τιμής

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x - \mu = z\sigma \Rightarrow x = \mu + z\sigma \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = 75 + 1,28(8) \Rightarrow x = 75 + 10,24 \Rightarrow x = 85,24$$

Ο ελάχιστος βαθμός για να πάρει ένας φοιτητής τιμητική διάκριση είναι 85,24.

Παράδειγμα 5: Μία μηχανή παράγει ένα εξάρτημα με βάρος που ακολουθεί την κανονική κατανομή $X \sim N(250, 5)$. Ποια η πιθανότητα ένα κομμάτι να είναι βάρους είτε < 242 είτε > 256 ;

Λύση

Υπολογίζουμε τη z-τιμή για $x = 242$ και τη z-τιμή για $x = 256$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{242 - 250}{5} = \frac{-8}{5} = -1,60$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{256 - 250}{5} = \frac{6}{5} = 1,20$$

Έχουμε:

$$P(x < 242) = P(z < -1,60) = F(-1,60) = 0,0548$$

$$\begin{aligned} P(x > 256) &= P(z > 1,20) = 1 - P(z < 1,20) = 1 - F(1,20) = 1 - 0,8849 = \\ &= 0,1151 \end{aligned}$$

Επομένως, η πιθανότητα ένα εξάρτημα να έχει βάρος από < 242 και > 256 γραμμάρια είναι $0,0548 + 0,1151 = 0,1699$ ή 16,99%.

Παράδειγμα 6: Ένα τεστ ποιότητας έχει μέση τιμή $\mu = 5$ και $\sigma = 0,2$ (μονάδες). Ο πελάτης αποδέχεται παρτίδες που έχουν $\geq 99\%$ πιθανότητα ότι ένα τυχαίο δείγμα είναι $> 4,6$. Είναι η παρτίδα αποδεκτή;

Λύση

Θέλουμε $P(X > 4,6) \geq 0,99$. Υπολογίζουμε z-τιμή για 4,6:

$$z = \frac{4,6 - 5}{0,2} = \frac{-0,4}{0,2} = -2$$

$$\begin{aligned} P(X > 4,6) &= P(Z > -2) = 1 - P(Z < -2) = 1 - F(-2) = 1 - 0,0228 = \\ &= 0,9772 \text{ ή } 97,72\% \end{aligned}$$

Έχουμε $97,72\% < 99\%$ άρα η παρτίδα δεν ικανοποιεί τον πελάτη.