



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας  
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

---

# Εισαγωγή στην πληροφορική

## Ενότητα 4: Ψηφιακή Λογική, Άλγεβρα Boole, Πίνακες Αλήθειας (Μέρος Α)

Αγγελίδης Παντελής

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

---

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Σκοπός

---

- **Σκοπός** αυτής της ενότητας είναι να κατανοήσετε τη **βασική ψηφιακή λογική**, τους **πίνακες αληθείας** καθώς και τα **ψηφιακά κυκλώματα**. Για την μελέτη των ψηφιακών κυκλωμάτων χρησιμοποιείται η **άλγεβρα Boole**.
- **Επιπλέον** μετά το πέρας αυτής της διάλεξης θα είστε ικανοί να σχεδιάζετε **ψηφιακές λογικές συναρτήσεις** με πύλες AND, OR και NOT, με αθροιστή και αφαιρέτη καθώς και να κατανοείτε τις εφαρμογές τους στα **ακολουθιακά κυκλώματα**.



# Περίγραμμα διάλεξης

---

- Βασική Ψηφιακή Λογική και Πίνακες Αληθείας:
  - Πύλη AND.
  - Πύλη OR.
  - Πύλη NOT.
  - Πύλη NAND.
  - Πύλη NOR.
  - Πύλη Exclusive OR.
  - Πύλη Exclusive NOR.



---

# Βασική Ψηφιακή Λογική και Πίνακες Αληθείας.



# Βασικές Λογικές Πύλες και Πράξεις (1/2)

---

- Οι λογικές πύλες είναι τα βασικά δομικά στοιχεία στα ψηφιακά κυκλώματα που απαρτίζουν μεταξύ άλλων και τις βασικές μονάδες ηλεκτρονικών κυκλωμάτων κάθε προσωπικού Η/Υ. Η αντιστοιχία εισόδων-εξόδου μιας πύλης ονομάζεται πίνακας αληθείας, όπου η έξοδος εκφράζεται ως συνάρτηση των εισόδων.
- Για την μελέτη των ψηφιακών κυκλωμάτων χρησιμοποιείται η άλγεβρα Boole όπου ορίζονται τρεις πράξεις:
  - ✓ Πράξη NOT.
  - ✓ Πράξη OR.
  - ✓ Πράξη AND.



# Βασικές Λογικές Πύλες και Πράξεις (2/2)

---

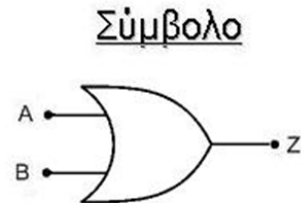
- Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα Boole ονομάζονται λογικές μεταβλητές γιατί μπορούν να πάρουν δύο (2) μόνο τιμές: 0 και 1.
- Τα δυαδικά ψηφία 0 και 1, που ουσιαστικά παριστάνουν τις δύο καταστάσεις αληθής (true) ψευδής (false), στο φυσικό επίπεδο είναι δυο διακριτά επίπεδα ηλεκτρικής τάσης (συνήθως στην ιδανική περίπτωση 5V και 0V).





# Πύλη OR

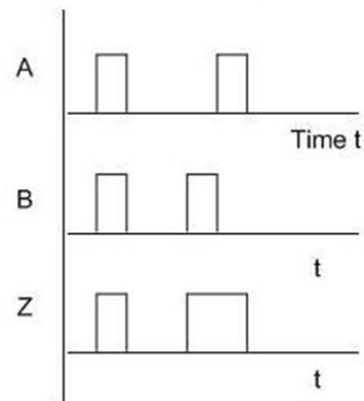
Η έξοδος είναι αληθής (*true*) εάν μια από τις εισόδους ή και οι δύο είναι αληθείς (*true*).



Πίνακας αληθείας

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

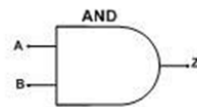
$$Z=A+B$$



# Πύλη AND

Η έξοδος είναι αληθής (*true*) όταν και οι δύο είσοδοι αληθείς (*true*).

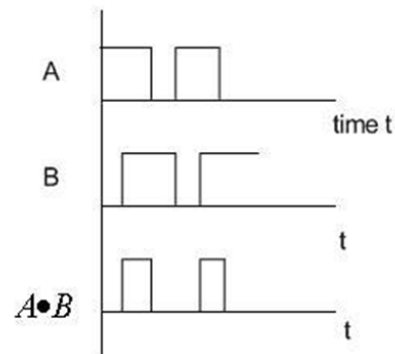
Σύμβολο



$$Z = A \cdot B$$

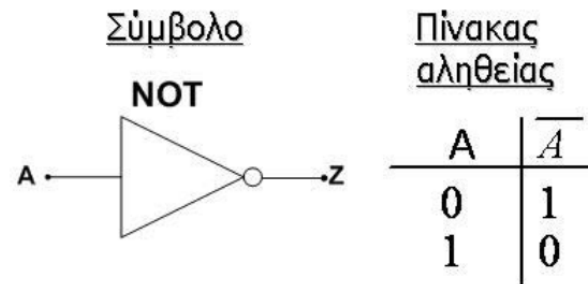
Πίνακας  
αληθείας

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

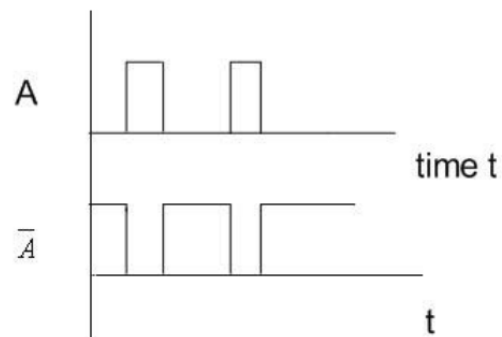


# Πύλη NOT (inverter)

*Η αντιστροφή του σήματος εισόδου.*



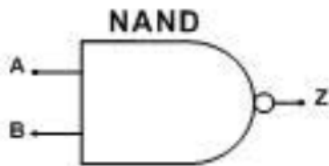
$$Z = \overline{A}$$



# Πύλη NAND (NOT AND)

Η έξοδος είναι ψευδής (0) μόνο όταν A και B είναι αληθείς (1).

Σύμβολο



$$Z = \overline{A \cdot B}$$

Πίνακας  
αληθείας

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# Πύλη NOR (NOT OR)

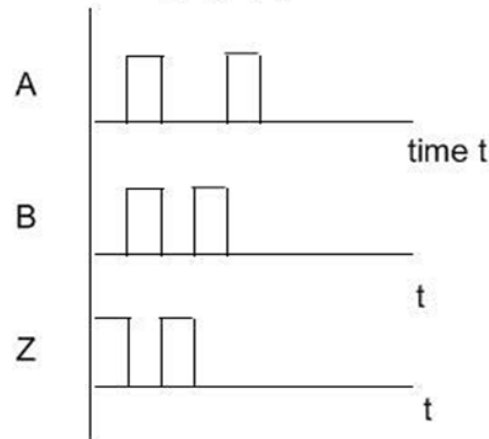
Η έξοδος είναι αληθής (1) όταν και οι δύο είσοδοι ψευδής (0).



$$Z = \overline{A + B}$$

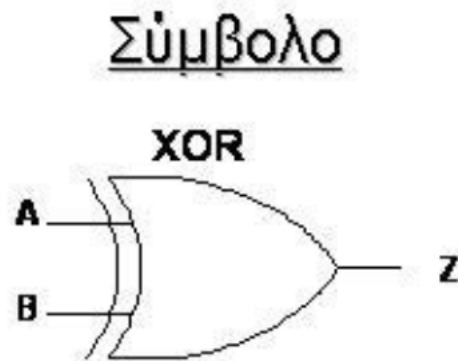
Πίνακας αληθείας

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



# Πύλη XOR (Exclusive OR )

Η έξοδος είναι αληθής (1) όταν ή το A ή το B είναι true αλλά όχι και τα δύο ταυτόχρονα.



$$Z = A \oplus B$$

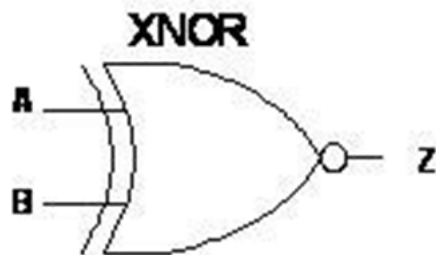
Πίνακας αληθείας

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# Πύλη ΧΝΟR (NOT ΧΟR )

Η έξοδος είναι αληθής (1) όταν και οι δύο είσοδοι είναι Ψευδείς (0) ή και οι δύο είναι αληθείς (1).

Σύμβολο

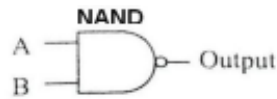


$$Z = \overline{A \oplus B}$$

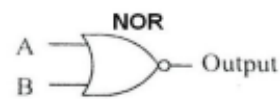
Πίνακας  
αληθείας

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

# Συνοπτικός Πίνακας Λογικών Πυλών



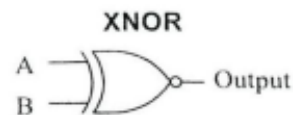
A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



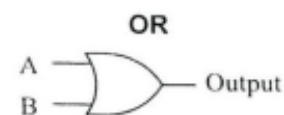
A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



A	B	Output
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



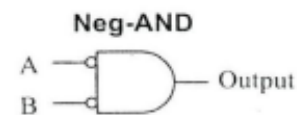
A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



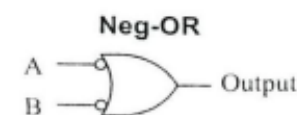
A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



A	Output
0	1
1	0



A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0





# Πίνακες αληθείας στο δυαδικό σύστημα

---

- Ένας πίνακας αληθείας παριστάνει τη συνάρτηση μεταξύ των εισόδων και της εξόδου ενός λογικού συστήματος.
- Για δύο εισόδους υπάρχουν 4 πιθανοί συνδυασμοί πραγματικών τιμών: FF, FT, TF, TT.
- Επειδή κάθε δυνατή είσοδος μπορεί να δώσει 2 διαφορετικές εξόδους (0,1) συνεπάγεται ότι οι δυνατοί πίνακες αληθείας για ένα λογικό σύστημα δύο εισόδων είναι:

$$2^4 = 16$$



# Όλοι οι πίνακες αληθείας για δύο εισόδους A, B και μια έξοδο Z

A	τιμές εισόδου				Συνάρτηση (έξοδος Z)	Σύμβολο
	F	F	T	T		
B	F	T	F	T		
0	F	F	F	F	πάντοτε 0	0
1	F	F	F	T	AND	$A \cdot B$
2	F	F	T	F	-	-
3	F	F	T	T	εισοδος A	A
4	F	T	F	F	-	-
5	F	T	F	T	εισοδος B	B
6	F	T	T	F	XOR	$A \oplus B$
7	F	T	T	T	OR	$A + B$
8	T	F	F	F	NOR	$\overline{A + B}$
9	T	F	F	T	XNOR	$\overline{A \oplus B}$
10	T	F	T	F	Not B	$\overline{B}$
11	T	F	T	T	-	-
12	T	T	F	F	Not A	$\overline{A}$
13	T	T	F	T	-	-
14	T	T	T	F	NAND	$\overline{A \cdot B}$
15	T	T	T	T	πάντοτε 1	1



---

# Άλγεβρα Boole



# Ιδιότητες και Κανόνες Άλγεβρας Boole

---

- Οι ιδιότητες και οι κανόνες της Άλγεβρας Boole εφαρμόζονται και ισχύουν σε τρεις κύριες ομάδες πράξεων.
  - Λογικές πράξεις με σταθερές.
  - Λογικές Πράξεις με μια μεταβλητή.
  - Λογικές πράξεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές.

## Λογικές Πράξεις με σταθερές

<u>AND</u>	<u>OR</u>	<u>NOT</u>
$0 \bullet 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	
$0 \bullet 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\bar{0} = 1$
$1 \bullet 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	$\bar{1} = 0$
<u><math>1 \bullet 1 = 1</math></u>	<u><math>1 + 1 = 1</math></u>	<u>                    </u>



# Λογικές πράξεις με μια μεταβλητή

AND	OR	NOT
$A \bullet 0 = 0$	$A + 0 = A$	
$A \bullet 1 = A$	$A + 1 = 1$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \bullet \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$	
$A \bullet A = A$	$A + A = A$	

## Παράδειγμα

Αποδείξτε τις σχέσεις

$$A + \overline{A} = 1 \text{ and } A \bullet 1 = A$$

Με τη χρήση πινάκων αληθείας

Πίνακες Αληθείας

$A$	$\overline{A}$	$A + \overline{A}$	$A$	$A \bullet 1$
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1



# Λογικές Πράξεις περισσότερες της μιας μεταβλητές (1/3)

---

## ***Αντιμεταθετική ιδιότητα***

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

## ***Απορροφητική ιδιότητα***

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

## ***Προσεταιριστική ιδιότητα***

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

## ***Επιμεριστική ιδιότητα***

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

## ***Κανόνας του De Morgan***

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$



# Λογικές Πράξεις περισσότερες της μιας μεταβλητές (2/3)

---

*Σημείωση*

$$\overline{A+B}$$

διαβάζεται A **NOR** B

$$A \bullet B$$

διαβάζεται A **NAND** B

*Κανόνας ελαχιστοποίησης*

$$A \bullet B + A \bullet \overline{B} = A$$

$$(A+B) \bullet (A+\overline{B}) = A$$

**Παράδειγμα**

Αποδείξτε ότι:

$$(A+B) \bullet (A+\overline{B}) = A$$

**Απόδειξη**

$$\begin{aligned}(A+B)(A+\overline{B}) &= AA + A\overline{B} + AB + B\overline{B} \\ &= A + A\overline{B} + AB + 0 \\ &= A + A(\overline{B} + B) \\ &= A + A \\ &= A\end{aligned}$$



# Λογικές Πράξεις περισσότερες της μιας μεταβλητές (3/3)

---

## Παράδειγμα

Αποδείξτε ότι:

$$A + (A \bullet B) = A$$

$$A \bullet (A + B) = A$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} A + (A \bullet B) &= (A + A) \bullet (A + B) \\ &= A \bullet (A + B) \end{aligned}$$

Άρα οι δύο σχέσεις είναι ισοδύναμες

Αντικαθιστώντας το  $A \bullet A$  με  $A \bullet 1$  προκύπτει:

$$\begin{aligned} A \bullet (A + B) &= A \bullet (1 + B) \\ &= A \bullet 1 \\ &= A \end{aligned}$$

ή με τη βοήθεια του πίνακα αληθείας

A	A B	A+(A B)
0	0	0
1	B	1





# Ερωτήσεις

---

Ευχαριστώ για την προσοχή σας



Καλό απόγευμα



# Βιβλιογραφία

---

- Παρουσίαση “Ψηφιακά Κυκλώματα”, σημειώσεις Αν. Μπαλουκτσή, ΑΤΕΙ Σερρών:  
[http://anamorfosi.teiser.gr/paradotea/d\\_3\\_1/psifiaka\\_kyklomata.ppt](http://anamorfosi.teiser.gr/paradotea/d_3_1/psifiaka_kyklomata.ppt)
- Παρουσίαση “Εφαρμογές των ακολουθιακών κυκλωμάτων”, σημειώσεις Χαρ. Βέργκος, Παν. Πάτρας:  
[http://pc-vlsi18.ceid.upatras.gr/LD\\_2/LD2SP3.ppt](http://pc-vlsi18.ceid.upatras.gr/LD_2/LD2SP3.ppt)  
<http://computerscience.ibpub.com/ecoa/2e/Null03.pdf>
- Ενδιαφέροντες πηγές με υλικό προς μελέτη:  
<http://www.ee.surrey.ac.uk/Projects/Labview/gatesfunc/SimulationFrameSet.htm>  
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Electronic/gate.html#c1>

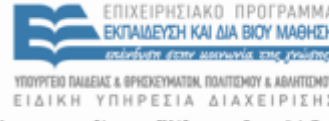


---

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Σημείωμα Αναφοράς

---

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Αγγελίδης Παντελής.  
«**Εισαγωγή στην Πληροφορική**». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://eclass.uowm.gr/courses/ICTE100/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Όχι Παράγωγα Έργα Μη Εμπορική Χρήση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό

# Διατήρηση Σημειωμάτων

---

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

